Logik

Fragebogen 18 vom 21. 1.

1. Gib einen regulären Ausdruck an, der bezeugt, dass die Sprache (10^*) sternfrei ist (denke auch hier an verbotene Infixe und mehr).

2. Betrachte die Aussagenvariablen pay, getcoffee, gettea zum Beschreiben eines Getränkeautomaten. Drücke folgende Eigenschaften des Automaten durch LTL-Formeln aus.

a) Nach dem Bezahlen bekommt man schließlich Kaffee oder Tee (aber nicht unbedingt zum unmittelbar nächsten Zeitpunkt).

b) Nach dem Bezahlen und vor dem Erhalt von Kaffee oder Tee ist es nicht möglich, nochmal zu bezahlen.

c) Die Nachfrage endet nie, sowohl an Kaffee als auch an Tee.

3. Was bedeutet: „die LTL-Formel φ ist initial äquivalent zur S1S-Formel $\psi(x)$“ ?

- ◯ Die Modelle von φ und $\psi(x)$ stimmen überein.
- ◯ Die S1S-Modelle von φ und $\psi(x)$ stimmen überein.
- ◯ Die S1S-Strukturen, die φ im initialen Element 0 erfüllen, stimmen überein mit den S1S-Strukturen, die $\psi(x)$ erfüllen.
- ◯ Die S1S-Strukturen, die φ im initialen Element 0 erfüllen, stimmen überein mit den S1S-Strukturen, die $\psi(x)$ erfüllen, wenn $\beta(x) = 0$ ist.
- ◯ In φ und $\psi(x)$ kommen dieselben Großbuchstaben (Initialen) vor.

Bitte wenden.

FO und formale Sprachen

Da MSO-Definierbarkeit genau den regulären Sprachen entspricht, ist eine **natürliche Frage:**

Sei F1S die Einschränkung von S1S auf FO.
Welche Sprachklasse entspricht den F1S-definierbaren Sprachen?

Definition 4.13 (sternfreie Sprachen)

Die Klasse der *sternfreien Sprachen* über einem Alphabet Σ ist die kleinste Klasse, so dass:

- $\emptyset$ und $\{a\}$ sind sternfreie Sprachen für alle $a \in \Sigma$.
- wenn L und L' sternfreie Sprachen sind, dann auch
  $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L,\quad L \cap L',\quad L \cup L'$ und $L \cdot L' = \{ww' \mid w \in L,\, w' \in L'\}$.

Beachte: Im Unterschied zu den regulären Sprachen steht der Kleene-Stern nicht zur Verfügung, dafür aber Komplement.

T4.14

LTL: Syntax

Definition 4.17 (LTL-Syntax)

Die Menge der LTL-Formeln ist induktiv definiert wie folgt:

- jede temporale Aussagenvariable ist eine LTL-Formel
- wenn φ und ψ LTL-Formeln sind, dann auch

$\neg\varphi$	
$\varphi \wedge \psi$	
$\varphi \vee \psi$	
$\bigcirc\varphi$	„im nächsten Zeitpunkt φ“
$\Diamond\varphi$	„in Zukunft irgendwann φ“
$\Box\varphi$	„in Zukunft immer φ“
$\varphi\, \mathcal{U}\, \psi$	„φ until ψ“

T4.15

LTL: Semantik

Die Semantik von LTL basiert üblicherweise auf *unendlichen* linearen Strukturen; wir verwenden hier endliche S1S-Strukturen.

LTL-Formeln haben einen Wahrheitswert, der *abhängig ist vom Zeitpunkt:*

Definition 4.18 (LTL-Semantik)

Wir definieren Erfülltheitsrelation $(\mathfrak{A}, n) \models \varphi$ induktiv, für S1S-Struktur $\mathfrak{A}$, Zeitpunkt $n \in A$ und LTL-Formel φ:

- $\mathfrak{A}, n \models p_i$ gdw. $n \in P_i^{\mathfrak{A}}$
- $\mathfrak{A}, n \models \neg\varphi$ gdw. $\mathfrak{A}, n \not\models \varphi$, ähnlich für $\wedge$ und $\vee$
- $\mathfrak{A}, n \models \bigcirc\varphi$ gdw. $n+1 \in A$ und $\mathfrak{A}, n+1 \models \varphi$
- $\mathfrak{A}, n \models \Diamond\varphi$ gdw. $\exists m \in A$ mit $m \geq n$ und $\mathfrak{A}, m \models \varphi$
- $\mathfrak{A}, n \models \Box\varphi$ gdw. $\forall m \in A$ mit $m \geq n$ gilt: $\mathfrak{A}, m \models \varphi$
- $\mathfrak{A}, n \models \varphi\, \mathcal{U}\, \psi$ gdw. $\exists m \in A$, so dass $m \geq n$,
  $\mathfrak{A}, k \models \varphi$ für $n \leq k < m$ und $\mathfrak{A}, m \models \psi$

T4.16

LTL versus F1S

Beachte:

- Syntaktisch kann man LTL als Erweiterung von Aussagenlogik auffassen.
- Semantisch handelt es sich eher um eine Logik erster Stufe, bei der die FO-Variablen aber implizit sind.
- Derartige Logiken nennt man auch *Modallogik.*

Eine LTL-Formel φ ist *initial äquivalent* zu einer F1S-Formel $\psi(x)$ mit einer freien Variablen, wenn für alle $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A}, 0 \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{A} \models \psi[0]$$

T4.17

Lemma 4.19

Zu jeder LTL-Formel φ existiert eine initial äquivalente F1S-Formel $\psi(x)$.

T4.18