# Logik

## Fragebogen 9 vom 26. 11.

**1.** Wie ist das Vorgehen beim Herstellen der PNF für die einzelnen Operatoren?

Negation $\neg$

- ◯ $\neg$ nach innen ziehen, dabei Quantoren „vertauschen“ ($\forall \leftrightarrow \exists$).
- ◯ $\neg$ nach außen ziehen, dabei Quantoren „vertauschen“.

Konjunktion und Disjunktion $\wedge, \vee$

- ◯ Quantoren nach außen ziehen, alle Variablen umbenennen.
- ◯ Doppelt vorkommende gebundene Variablen umbenennen, Quantoren nach außen ziehen.
- ◯ Doppelt vorkommende freie Variablen umbenennen, Quantoren nach außen ziehen.

Quantoren $\exists x, \forall x$

- ◯ Wenn nötig, $x$ umbenennen.
- ◯ Wenn nötig, alle Variablen außer $x$ umbenennen.

**2.** Gegeben ist das PKP $F = (0, 00), (10, 1), (01, 1)$.

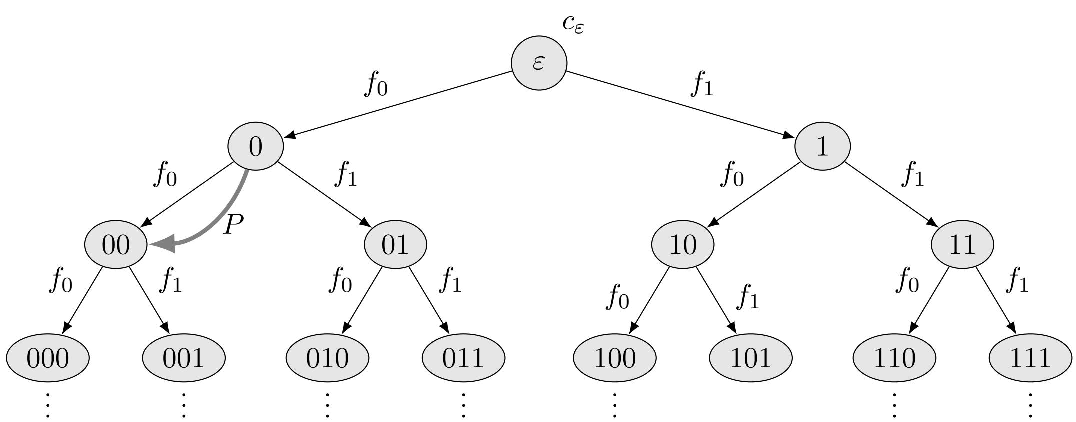
a) Welche der folgenden Indexfolgen sind Lösungen? ☐ $1, 1, 1$ ☐ $1, 2$ ☐ $1, 3$

b) Gib eine weitere Lösung der Länge 2 an: ___, ___

c) Wie kann man aus den Lösungen aus a) und b) weitere Lösungen für $F$ bilden?

---

**3.** Zeichne für 6 Wortpaare, die von $F$ aus Aufgabe 2 erzeugt werden können, die entsprechenden $P$-Kanten in die folgende Struktur ein (eine ist bereits vorgegeben).




Bitte wenden.

## Pränex-Normalform

**Theorem 2.21**
Jede FO-Formel kann in Linearzeit in eine äquivalente Formel in PNF gewandelt werden.

**Für den Beweis benötigen wir folgende Äquivalenzen:**

Falls $x$ nicht frei in $\varphi$ vorkommt, gilt:

- $\varphi \vee \exists x\, \psi \equiv \exists x\, (\varphi \vee \psi)$
- $\varphi \wedge \exists x\, \psi \equiv \exists x\, (\varphi \wedge \psi)$
- $\varphi \vee \forall x\, \psi \equiv \forall x\, (\varphi \vee \psi)$
- $\varphi \wedge \forall x\, \psi \equiv \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$

T2.15

**Beweis von Theorem 2.21**
… liefert auch gleichzeitig das Verfahren zur Umwandlung

T2.16

**Beispiel**

T2.17



## Das Postsche Korrespondenzproblem

Wir verwenden eine Reduktion des Postschen Korrespondenzproblems

**Definition 2.22 (Postsches Korrespondenzproblem, PKP)**
**Gegeben:** Eine Folge $F = (u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)$ von Wortpaaren mit $u_i, v_i \in \{0,1\}^*$

**Frage:** Gibt es eine Indexfolge $i_1, \dots, i_\ell$, so dass $u_{i_1} \cdots u_{i_\ell} = v_{i_1} \cdots v_{i_\ell}$ ?

Eine solche Folge heißt *Lösung* für $F$.

T2.18

Bekannt aus VL „Theoretische Informatik 2“:

**Theorem 2.23 (Post)**
Das PKP ist unentscheidbar.



## Reduktion des PKP

**Ziel:** Für gegebenes PKP $F$ einen FO-Satz $\varphi_F$ konstruieren, so dass:

$F$ hat eine Lösung gdw. $\varphi_F$ gültig ist.

**Verwendete Signatur:**

- ein Konstantensymbol $c_\varepsilon$
- zwei einstellige Funktionssymbole $f_0$ und $f_1$
- ein zweistelliges Relationssymbol $P$

**Intuition:**

- $c_\varepsilon$, $f_0$, $f_1$ erzeugen alle Wörter
- $P$ kennzeichnet Wortpaare, die $F$ erzeugen kann

T2.19



## Details der Reduktion

**Schreibweise:**
Für Wort $w = w_1 \cdots w_n \in \{0,1\}^*$ steht $t_w(x)$ für $f_{w_n}(f_{w_{n-1}}(\cdots f_{w_1}(x)))$

Für PKP $F = (u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)$ setze

$$\varphi_F = (\varphi \wedge \psi) \to \exists x\, P(x,x)$$

wobei

$$\varphi = \bigwedge_{i=1,\dots,k} P(t_{u_i}(c_\varepsilon), t_{v_i}(c_\varepsilon))$$

$$\psi = \forall x\, \forall y \left( P(x,y) \to \bigwedge_{i=1,\dots,k} P(t_{u_i}(x), t_{v_i}(y)) \right)$$

**Lemma 2.24**
$F$ hat eine Lösung gdw. $\varphi_F$ gültig ist.

T2.20