Komplexität modaler Logiken

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Mathematiker

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik

eingereicht von Thomas Schneider
geb. am 15. 06. 1976 in Leipzig
Betreuer: Prof. Dr. M. Mundhenk

Jena, den 2. September 2002

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das Erfüllbarkeitsproblem von Systemen der modalen Aussagenlogik komplexitätstheoretisch untersucht. Um dies vorzubereiten, wird auf die erforderlichen Aspekte der Theorie modaler Logiken eingegangen und eine Hierarchie wichtiger normaler modaler Systeme anhand semantischer Gesichtspunkte aufgestellt. Das Hauptaugenmerk der komplexitätstheoretischen Betrachtungen richtet sich auf normale unimodale Logiken, die für die Klasse NP vollständig sind. Neben aus der Literatur bekannten Resultaten wird die NP-Vollständigkeit der Systeme **D4E**, **K4B** und **K4E** gezeigt. Außerdem wird ein Überblick über bisher bekannte PSPACE-Vollständigkeitsergebnisse gegeben. Vermutet wird die NP-Vollständigkeit der Logiken **K4.2** und **S4.2** sowie die PSPACE-Vollständigkeit von **KE**, **KB**, **DE**, **DB**, **B**. Eine weitere offene Frage ist die nach einer einheitlichen Reduzierbarkeit zwischen modalen Systemen, die ineinander enthalten sind.

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Abkürzungen, Symbole, Begriffe

Axiome

Inferenzregeln

Logiken

Komplexitätsklassen und Probleme

Symbole

Begriffe

Vorwort

Altbekannt und doch brandneu. Modale Logik kennt man in der Philosophie seit mehr als einem halben Jahrhundert. Sie wird auch „Logik der Notwendigkeit und Möglichkeit“ genannt und stellt eine aussagekräftigere Erweiterung der klassischen Aussagenlogik dar.

Seit längerer Zeit weiß man die Vorzüge, die modale Aussagenlogik zu bieten hat, auch in der Informatik zu schätzen. Mit ihrer Hilfe kann man über das Wissen von Personen und Personengruppen urteilen, Aussagen über die zeitliche Veränderung von Dingen treffen oder das Verhalten von Computerprogrammen untersuchen. Dadurch ist modale Logik ein wertvolles und modernes Hilfsmittel für die künstliche Intelligenz und andere Bereiche der theoretischen Informatik.

Modale Logik und Komplexitätstheorie. So wie die klassische Aussagenlogik das bekannte Erfüllbarkeitsproblem

$$\mathrm{SAT} = \{\varphi : \varphi \text{ ist eine erfüllbare aussagenlogische Formel}\}$$

besitzt, kann man für modale Aussagenlogik ein ähnliches Problem betrachten und sich nach dessen Entscheidbarkeit und gegebenenfalls auch dessen Komplexität fragen. Während das klassische Problem SAT bereits hinreichend bekannt ist und komplexitätstheoretisch untersucht wurde, ist das Erfüllbarkeitsproblem der modalen Aussagenlogik bei Weitem noch nicht erschöpfend untersucht. Das liegt möglicherweise zum einen daran, dass modale Logiken „jünger“ und teilweise weniger bekannt sind als die klassische Aussagenlogik. Zum anderen gibt es sehr viele verschiedene Systeme und „Typen“ modaler Aussagenlogik, die sich durch ihre syntaktische und semantische Charakterisierung mehr oder weniger stark unterscheiden und dadurch verschiedene Herangehensweisen bei der Untersuchung der Komplexität des Erfüllbarkeitsproblems erfordern.

Diese Arbeit hat das Ziel, bisher bekannte Komplexitätsresultate für eine Reihe modaler Logiken zusammenzutragen und neue Ergebnisse zu finden.

Dazu wird im ersten Kapitel erklärt, was man unter modaler Aussagenlogik versteht. Es wird außerdem gezeigt, wie diese Logiken syntaktisch und semantisch charakterisiert werden und welche Beziehungen zwischen ihnen bestehen. Darüber hinaus werden Eigenschaften modaler Logiken aufgeführt, die für die späteren Komplexitätsbeweise grundlegend sind. Außerdem wird eine Hierarchie wichtiger normaler unimodaler Systeme aufgestellt und begründet. Die dazu erforderlichen umfangreichen Details werden in den Anhang „ausgelagert“.

Das zweite Kapitel befasst sich mit normalen modalen Systemen, deren Erfüllbarkeitsprobleme für eine der Komplexitätsklassen NP und PSPACE vollständig sind. Dazu werden bereits bekannte Ergebnisse aus der Literatur zusammengetragen und eigene Ergebnisse bewiesen. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels zeigt offene Fragen auf und gibt Anregungen, in welche Richtungen die Untersuchungen dieser Arbeit fortgeführt werden können.

Einige private Worte. Seit ich im vergangenen Jahr während eines Auslandssemesters an der *University of Cape Town* (UCT) eine Vorlesung über modale Logiken gehört habe, bin ich von diesem Gebiet fasziniert. Ich wollte unbedingt meine Diplomarbeit über „Etwas mit modalen Logiken“ schreiben, hatte aber zunächst keine genaue Idee, wie ich dieses „Etwas“ präzisieren und zu einem geeigneten Thema einschränken könnte. Umso mehr freute ich mich, als Herr Professor Mundhenk mir vorschlug, mich mit der Komplexität modaler Systeme zu beschäftigen.

Ein erstes Literaturstudium zeigte, dass dieses Gebiet bisher bei Weitem noch nicht erschöpfend untersucht ist und es allein schon reizvoll wäre, ein wenig Übersicht in die bisher gefundenen Ergebnisse zu bringen und vielleicht das eine oder andere Ergebnis selbst zu finden. Ich hätte zwar gern noch mehr „Neues“ herausgefunden, aber das ist vielleicht später im Rahmen einer Promotion immer noch möglich ...

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Herrn Professor Mundhenk, der mich ein halbes Jahr lang sehr gut beraten, angehört und motiviert hat, bei Frau Dr. Rewitzky aus dem *Department of Mathematics and Applied Mathematics* der UCT für die interessante Vorlesung und die anregenden Übungen dazu, bei den Teilnehmern des Oberseminars Theoretische Informatik, die mir die Gelegenheit gaben, in einem Vortrag eine Zwischenbilanz meiner Arbeit zu ziehen, bei Herrn Dipl.-Math. André Große für wertvolle Anregungen und natürlich bei meiner Freundin, Renate Stein, für ein immer offenes Ohr bei Hochs und Tiefs.

1 Modale Aussagenlogik

Ziel dieses Kapitels ist es, modale Aussagenlogik sowohl syntaktisch als auch semantisch zu erklären und alle in den folgenden Kapiteln benötigten Eigenschaften modaler Logiken anzugeben. Der behandelte Stoff ist Grundwissen aus einer Vorlesung über modale Logik an der *University of Cape Town* ([6]) oder stammt aus Fachbüchern ([1], [4]).

1.1 Syntax der modalen Grundsprache

In diesem Abschnitt wird die modale Grundsprache eingeführt. Sie erweitert die klassische Aussagenlogik um zwei zueinander duale modale Operatoren $\Box$ und $\Diamond$, denen je nach Anwendung Bedeutungen wie „notwendigerweise wahr“ bzw. „möglicherweise wahr“ zukommen.

Um Formeln bilden zu können, werden folgende Bestandteile benötigt:

- atomare Formeln: $\Phi = \{p, q, r, \ldots\}$ (Φ ist abzählbar.)
- klassische Operatoren: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- modale Operatoren: $\Box$, $\Diamond$
- „wahr“, „falsch“: $\top$, $\bot$

Definition 1.1

(1) Eine ***Formel*** *ist ein Wort φ, das aus den genannten Zeichen besteht und eine der folgenden Gestalten hat:*

(i)	$\top$,	
(ii)	p,	*für ein beliebiges $p \in \Phi$,*
(iii)	$\neg\psi$,	*für eine beliebige Formel ψ,*
(iv)	$\psi_1 \wedge \psi_2$,	*für beliebige Formeln ψ_1, ψ_2,*
(v)	$\Diamond\psi$,	*für eine beliebige Formel ψ.*

(2) Darüber hinaus werden folgende ***Kurzschreibweisen*** *vereinbart:*

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &= \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \qquad & \bot &= \neg\top \\ \varphi \rightarrow \psi &= \neg\varphi \vee \psi & \Box\varphi &= \neg\Diamond\neg\varphi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &= (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

(3) Die Menge aller Formeln über Φ wird mit $\mathrm{Fma}(\Phi)$ bezeichnet.

(4) Eine ***Teilformel*** *von $\varphi \in \mathrm{Fma}(\Phi)$ ist eine Formel, die ein Teilwort von φ ist. Die Menge aller Teilformeln von φ heißt $\mathrm{Sub}(\varphi)$.*

1.2 Interpretation der modalen Operatoren

Je nach Anwendung einer modalen Logik gibt es verschiedene Möglichkeiten, die modalen Operatoren $\Box$ und $\Diamond$ zu lesen. Durch die verschiedenen Interpretationsweisen werden Erweiterungen der modalen Grundsprache bedingt, welche in Abschnitt 1.6 behandelt werden.

Klassische Interpretation. In der reinen Grundsprache liest man $\Box\varphi$ bzw. $\Diamond\varphi$ als „φ ist *notwendigerweise* wahr“ bzw. „φ ist *möglicherweise* wahr“. Mit dieser Interpretation erhalten Formeln Bedeutungen wie etwa:

$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	(Wenn $\varphi \to \psi$ notwendig wahr, dann folgt: Wenn φ notwendig wahr, dann ψ notwendig wahr.)
$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$	(Was notwendig wahr ist, ist möglich.)
$\varphi \to \Diamond\varphi$	(Was wahr ist, ist möglich.)

Man könnte anhand der genannten Interpretationen und mit menschlicher Intuition zu dem Schluss kommen, dass alle Instanzen der oben aufgeführten Formeln wahr sein müssen. Dass diese Schlussweise nicht immer gelingt (hier versagt sie z. B. in den letzten beiden Fällen), zeigt sich mit dem entsprechenden Wissen der folgenden Abschnitte über Semantik modaler Aussagenlogik und deren Axiomatisierungen.

Epistemische Logik – Multimodale Logik. In *epistemischer* Logik wird die modale Grundsprache verwendet, um über Wissen zu urteilen. Hier wird $K\varphi$ an Stelle von $\Box\varphi$ geschrieben, was man als „der Agent weiß, dass φ“ interpretiert. Epistemische Logik wird zumeist multimodal (also mit n modalen Operatoren $K_1, \ldots, K_n$) verwendet, um über das Wissen verschiedener Agenten und von Gruppen von Agenten etwas aussagen zu können.

Temporale Logik. Hier gibt es vier modale Operatoren, die wie folgt interpretiert werden:

$F\varphi$:	„φ ist zu *irgendeinem* Zeitpunkt in der Zukunft wahr.“
$P\varphi$:	„φ war zu *irgendeinem* Zeitpunkt in der Vergangenheit wahr.“
$G\varphi$:	„φ ist zu *allen* Zeitpunkten in der Zukunft wahr.“
$H\varphi$:	„φ war zu *allen* Zeitpunkten in der Vergangenheit wahr.“

Dabei sind F, P (wegen *F*uture, *P*ast) vom Typ „$\Diamond$“ und G, H (wegen *G*oing to, *H*as been) vom Typ „$\Box$“. Man kann sich leicht vom Sinn der Dualitäten $G\varphi = \neg F\neg\varphi$ und $H\varphi = \neg P\neg\varphi$ überzeugen.

1.3 Semantik unimodaler Aussagenlogik

Wenn man die Semantik modaler Logiken betrachtet, genügt es nicht, die „globale“ Wahrheit einer Formel mittels einer Belegungsfunktion festzulegen. Man benötigt vielmehr eine Menge von Welten (auch Punkte oder Zustände genannt), eine binäre Relation zwischen den Welten („Welt v sieht Welt w“) und eine Belegungsfunktion. Dabei entspricht jede Welt $w \in W$ einer Interpretation der Aussagenlogik, weist also mittels der Belegungsfunktion jeder atomaren Aussage p einen Wahrheitswert $w(p) \in \{0, 1\}$ zu. Der („lokale“) Wahrheitswert einer zusammengesetzten Formel in einer beliebigen Welt wird dann ähnlich wie in der klassischen Aussagenlogik induktiv festgelegt. Dazu benötigt man für den Fall, dass die entsprechende Formel eine $\Diamond$-Formel ist, zusätzlich die gegebene binäre Relation.

Darüber hinaus kennt die Semantik modaler Logiken „globale“ Formen der Gültigkeit von Formeln. Formal werden die zugrunde liegenden Strukturen und die Wahrheit von Formeln wie folgt definiert:

Definition 1.2 *Seien W eine nicht leere Menge von* ***Welten*** *und $R \subseteq W \times W$ eine binäre Relation, die* ***Sichtbarkeitsrelation****.*

(1) Die Struktur $\mathcal{F} = (W, R)$ heißt ***Kripke-Struktur*** *oder* ***Rahmen****.*
(2) Eine Funktion $V : A \to \mathfrak{P}(W)$ heißt ***Belegungsfunktion*** *und weist jeder atomaren Aussage $p \in A$ die Menge aller Welten zu, in denen p wahr ist.*
(3) Sind $\mathcal{F} = (W, R)$ ein Rahmen und V eine Belegungsfunktion, so heißt eine Struktur $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ein ***Modell****. Man sagt dann auch, $\mathcal{M}$* ***basiert*** *auf $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F}$* ***liegt*** *$\mathcal{M}$* ***zugrunde****.*

Definition 1.3 *Seien $\mathcal{F} = (W, R)$ ein Rahmen und $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ein auf $\mathcal{F}$ basierendes Modell. Eine Formel φ heißt*

(1) ***wahr*** *in einer Welt $w \in W$ ($\mathcal{M}, w \models \varphi$) genau dann, wenn einer der folgenden Fälle eintritt:*
   (i) $\varphi = p$ und $w \in V(p)$, wobei $p \in \Phi$,
   (ii) $\varphi = \top$,
   (iii) $\varphi = \neg\psi$ und $\mathcal{M}, w \not\models \psi$,
   (iv) $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ und $\mathcal{M}, w \models \psi_1$ und $\mathcal{M}, w \models \psi_2$,
   (v) $\varphi = \Diamond\psi$ und es gibt ein v mit wRv und $\mathcal{M}, v \models \psi$.
(2) ***wahr*** *in $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models \varphi$) genau dann, wenn φ in allen Welten $w \in W$ wahr ist.*
(3) ***wahr*** *in $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models \varphi$) genau dann, wenn φ in allen auf $\mathcal{F}$ basierenden Modellen wahr ist.*
(4) ***wahr*** *($\models \varphi$) genau dann, wenn φ in allen Rahmen wahr ist.*

Beispiel. Gegeben seien folgende Strukturen gemäß Abbildung 1.1:

$$\begin{aligned} \Phi &= \{p, q\}, \\ W &= \{w_1, \ldots, w_5\}, \\ R &= \{(w_1, w_2), \ldots, (w_4, w_5)\}, \\ \mathcal{F} &= (W, R). \end{aligned}$$

Wählt man nun die Belegungsfunktion V_1 auf $\mathcal{F}$ mit

$$\begin{aligned} V_1(p) &= \{w_1, w_2\}, \\ V_1(q) &= \{w_2, \ldots, w_5\} \end{aligned}$$

und betrachtet das Modell

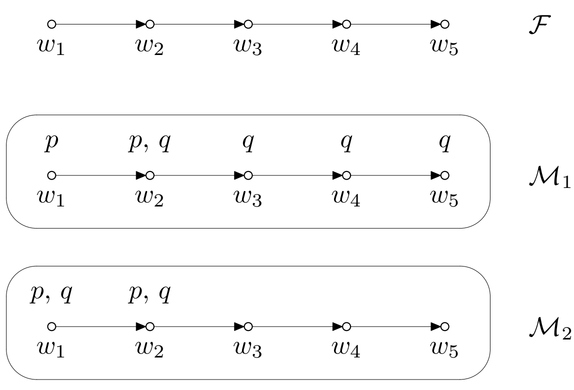

Abbildung 1.1: Beispiel-Rahmen $\mathcal{F}$ und darauf basierende Modelle $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$.

$\mathcal{M}_1 = (W, R, V_1)$, so kann man u. a. folgende Aussagen treffen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1, w_1 &\models p, \Diamond p, \Box p, \Diamond q, \Diamond\Diamond q, \Diamond^3 q, \Diamond^4 q, \Box q, \Box\Box q, \Box^3 q, \Box^4 q, \Box^5 q, \ldots,\\
\mathcal{M}_1, w_2 &\models p, q, \Diamond\neg p, \Box\neg p, \Diamond q, \Diamond\Diamond q, \Diamond^3 q, \Box q, \Box\Box q, \Box^3 q, \Box^4 q, \Box^5 q, \ldots,\\
&\vdots\\
\mathcal{M}_1, w_5 &\models \neg p, q, \Box q, \Box\Box q, \Box^3 q, \Box^4 q, \Box^5 q, \ldots
\end{aligned}$$

Damit gilt $\mathcal{M}_1 \models \Box q, \Box\Box q, \Box^3 q, \Box^4 q, \Box^5 q, \ldots$ Diese Formeln sind aber nicht in ganz $\mathcal{F}$ wahr, wie Modell $\mathcal{M}_2 = (W, R, V_2)$ belegt. Dort ist nämlich beispielsweise $\Box q$ in w_2 nicht wahr.

Nach längerer Betrachtung kann man Formeln finden, die in ganz $\mathcal{F}$ wahr sind. Eine solche Formel ist $\Diamond p \rightarrow \Box p$, welche aber wiederum nicht generell wahr ist, wie der Rahmen $\mathcal{F}'$ und das darauf basierende Modell $\mathcal{M}'$ aus Abbildung 1.2 belegen.

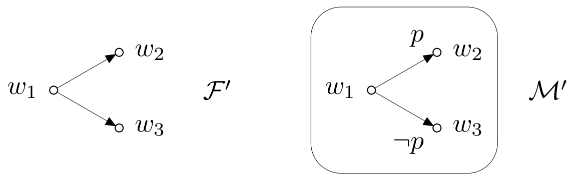

Abbildung 1.2: Beispiel-Rahmen $\mathcal{F}'$ und darauf basierendes Modell $\mathcal{M}'$.

Generell gültige Formeln sind beispielsweise das Axiom

$$\mathsf{K} \qquad \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

sowie alle Formeln, die man daraus erhält, wenn man simultan alle Vorkommen von p durch eine beliebige Formel β_1 und alle Vorkommen von q durch eine Formel β_2 ersetzt. Darauf wird im folgenden Abschnitt näher eingegangen. ∘

Neben dem Begriff der Wahrheit einer Formel gibt es auch den Begriff der Erfüllbarkeit, der mit ersterem nicht zu verwechseln ist. Die folgende Definition gilt analog für Rahmen.

Definition 1.4 *Seien φ eine Formel, $\mathcal{M}$ ein Modell, $\mathfrak{M}$ eine Klasse von Modellen.*

*(1) $\mathcal{M}$ **erfüllt** φ (φ ist in $\mathcal{M}$ erfüllbar) genau dann, wenn es eine Welt von $\mathcal{M}$ gibt, in der φ wahr ist.*

*(2) $\mathfrak{M}$ **erfüllt** φ (φ ist in $\mathfrak{M}$ erfüllbar) genau dann, wenn es ein φ erfüllendes Modell in $\mathfrak{M}$ gibt.*

Die Erfüllbarkeit und die Wahrheit von Formeln sind in gewisser Weise zueinander dual: φ ist erfüllbar in einem Modell (oder einem Rahmen) genau dann, wenn $\neg\varphi$ in diesem Modell (bzw. Rahmen) nicht wahr ist.

1.4 Axiomatisierungen

Axiome. Axiome legen die grundlegenden Eigenschaften der Anwendung einer modalen Logik auf syntaktischer Ebene fest. Wichtige Axiome der unimodalen Aussagenlogik sind beispielsweise:

Taut	alle aussagenlogischen Tautologien	
K	$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$	Abgeschlossenheit von Wissen unter Implikation
Dual	$\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$	Dualität der Bedeutung der Operatoren
T	$\Box p \to p$	Notwendigkeit
4	$\Box p \to \Box\Box p$	Positive Selbsteinsicht
5	$\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$	Negative Selbsteinsicht

Inferenzregeln. Mit folgenden Regeln kann man aus Axiomen und bereits bewiesenen Formeln (*Theoremen*) neue Theoreme erhalten:

MP	Modus Ponens:	Aus $\varphi \to \psi$ und φ beweise ψ
NR	Notwendigkeitsregel:	Aus φ beweise $\Box\varphi$
US	uniforme Substitution:	Aus φ beweise $\varphi\,[\beta_1/p_1, \ldots, \beta_n/p_n]$

In der Regel US bezeichnet die Schreibweise $\varphi\,[\beta_1/p_1, \ldots, \beta_n/p_n]$ diejenige Formel, die man erhält, wenn man in φ gleichzeitig alle Vorkommen der atomaren Aussagen $p_1, \ldots, p_n$ durch die (beliebigen) Formeln $\beta_1, \ldots, \beta_n$ ersetzt. Diese Inferenzregel wird nur benötigt um abzusichern, dass für ein Axiom auch dessen Ersetzungsinstanz beweisbar ist. Es ist also auch möglich (und in der Literatur zuweilen üblich), auf die uniforme Substitution zu verzichten und an Stelle jedes Axioms ein Axiomen*schema* anzugeben, in dem statt der atomaren Aussagen beliebige Formeln vorkommen. Dieser Zugang ist äquivalent zu dem hier gewählten. Das bedeutet, dass die Systeme, die durch beide Zugänge mit gleichen Axiomen(-schemata) gebildet werden, auch gleich sind.

Systeme. Das klassische modale System **K** wird durch die Axiome Taut, K und Dual sowie die Inferenzregeln MP, NR und US charakterisiert. Das heißt, dass zum Beweis einer **K**-Formel die Axiome Taut, K und Dual sowie alle drei Inferenzregeln zur Verfügung stehen. Formal werden logische Systeme wie folgt definiert:

Definition 1.5

(1) *Eine Menge Γ von Formeln heißt **abgeschlossen** bezüglich einer Inferenzregel* IR *genau dann, wenn alle Formeln, die man durch Anwendung von* IR *auf beliebige Formeln aus Γ beweisen kann, wieder in Γ sind.*

(2) *Ein **modales System** (oder eine **modale Logik**) Λ ist eine Menge von Formeln, die alle aussagenlogischen Tautologien enthält und abgeschlossen bezüglich der Inferenzregeln* MP *und* US *ist.*

*Die Elemente von Λ werden **Theoreme** genannt. Statt $\varphi \in \Lambda$ schreibt man auch $\vdash_\Lambda \varphi$.*

(3) *Ein modales System heißt **konsistent** genau dann, wenn $\nvdash_\Lambda \bot$ gilt.*

(4) *Ein modales System Λ heißt **normal**, falls es die Axiome* K *und* Dual *enthält und abgeschlossen bezüglich* NR *ist.*

(5) *Das kleinste normale System heißt* **K**.

Die Betrachtungen dieser Arbeit werden sich auf normale modale Systeme beschränken. Deshalb wird eine besondere, nur für normale Systeme gültige Schreibweise eingeführt:

Definition 1.6 Λ *sei ein normales modales System, und* F *sei eine Menge von Formeln (z. B. von Axiomen). Dann bezeichnet* $\Lambda + F$ *das kleinste normale System, das* Λ *und* F *enthält.*

Man erhält also größere Systeme als **K**, indem man Formeln, die nicht in **K** beweisbar sind, als Axiome hinzunimmt und dann den Abschluss der neuen Formelmenge bezüglich der drei Inferenzregeln bildet. Auf diese Weise kann man beispielsweise die klassischen Systeme **T** = **K** + T, **S4** = **T** + 4, **S5** = **S4** + 5 und noch viele weitere Logiken bilden.

Korrespondenztheorie. Wie in der klassischen Aussagenlogik und Prädikatenlogik spiegeln Axiome auch in der modalen Logik gewünschte Eigenschaften der Anwendung bestimmter modaler Systeme wider. So stellen beispielsweise die Interpretationen, die den Axiomen K und Dual zugrunde liegen, Eigenschaften dar, die in den meisten klassischen Anwendungen normaler Systeme gefordert werden (s. a. Abschnitt 1.2). Die Bedeutungen von T, 4 und 5 werden am deutlichsten, wenn man die epistemische Betrachtungsweise benutzt: Die Feststellung „Wenn jemand etwas weiß, dann gilt es“ entspricht T und ist erforderlich, wenn die Anwendung voraussetzt, dass der Agent korrektes Wissen hat. Die Interpretationen von 4 und 5 aus Abschnitt 1.2 können ähnlich beleuchtet werden.

Wegen dieser engen Verknüpfung zwischen Axiomen und ihrer (intuitiven) Interpretation ist es nicht verwunderlich, dass auch enge Zusammenhänge zwischen Axiomen und Eigenschaften von Rahmen bestehen. Die Korrespondenztheorie besagt für viele Paare von Axiomen A und prädikatenlogischen Aussagen P, dass folgende Eigenschaft gilt:

A ist in einem Rahmen $\mathcal{F} = (W, R)$ genau dann wahr, wenn P für R bezüglich W gilt.

Solche Korrespondenzeigenschaften gelten für viele bekannte Axiome, insbesondere für diejenigen, mit denen die in dieser Arbeit verwendeten Systeme definiert sind. Im Folgenden sind alle diese Axiome und die korrespondierenden Aussagen angegeben. Dabei werden für die Axiome T, 4 und E = 5 Schreibweisen verwendet, die zu denen auf Seite 15 äquivalent sind.

Für Beweise der Korrespondenzresultate sei auf die Literatur ([1], [4]) verwiesen.

Name	Axiome und korrespondierende Eigenschaft
K	$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ R ist beliebige Relation
Dual	$\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$ R ist beliebige Relation
T	$p \to \Diamond p$ $\forall u(uRu)$ (Reflexivität)
4	$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ $\forall u \forall v \forall w((uRv \wedge vRw) \Rightarrow uRw)$ (Transitivität)

E $\quad \Diamond p \to \Box\Diamond p$

$\forall u \forall v \forall w((uRv \wedge uRw) \Rightarrow vRw)$ (Euklidizität)

B $\quad p \to \Box\Diamond p$

$\forall u \forall v(uRv \Rightarrow vRu)$ (Symmetrie)

D $\quad \Box p \to \Diamond p$

$\forall u \exists v(uRv)$ (Totalheit)

$\mathsf{T_c}$ $\quad \Diamond p \to p$

$\forall v \forall w(vRw \Rightarrow v = w)$.

Triv $\quad \Diamond p \leftrightarrow p$

$\forall v \forall w(vRw \Leftrightarrow v = w)$.

Ver $\quad \neg\Diamond p$

$\forall v \forall w(\neg vRw)$.

$\mathsf{Alt_n}$ $\quad \Box p_1 \vee \Box(p_1 \to p_2) \vee \ldots \vee \Box((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \to p_{n+1})$

$\forall u \forall v_1 \ldots \forall v_{n+1}((uRv_1 \wedge \ldots \wedge uRv_{n+1}) \Rightarrow \exists i,\, j \leq n+1(i \neq j \wedge v_i = v_j))$

(Jede Welt hat höchstens n R-Nachfolger.)

.2 $\quad \Diamond(p \wedge \Box q) \to \Box(p \vee \Diamond q)$

$\forall u \forall v \forall w((uRv \wedge uRw \wedge v \neq w) \Rightarrow \exists x(vRx \wedge wRx))$

.3 $\quad \Diamond p \wedge \Diamond q \to \Diamond(p \wedge \Diamond q) \vee \Diamond(p \wedge q) \vee \Diamond(\Diamond p \wedge q)$

$\forall u \forall v \forall w((uRv \wedge uRw) \Rightarrow (vRw \vee v = w \vee wRv))$

Die zu .2 und .3 korrespondierenden Eigenschaften werden mit Namen versehen, damit später besser auf sie zurückgegriffen werden kann. Dabei gilt jeder Name sowohl für Relationen als auch für alle Rahmen mit solchen Relationen.

Definition 1.7

(1) *Eine Relation R heißt **zusammenlaufend** genau dann, wenn sie folgende Eigenschaft erfüllt:*

$$\bigwedge_{u,v,w}\left((uRv \wedge uRw \wedge v \neq w) \Rightarrow \bigvee_{x}(vRx \wedge wRx)\right)$$

(2) *Eine Relation R **hat keine Vorwärtsverzweigung** genau dann, wenn sie folgende Eigenschaft erfüllt:*

$$\bigwedge_{u,v,w}((uRv \wedge uRw) \Rightarrow (vRw \vee v = w \vee wRv))$$

1.5 Modale Systeme

Die für diese Arbeit relevanten modalen Systeme sind wie folgt axiomatisiert:

K	**K4E** = **K** + 4 + E	**D4E** = **K** + D + 4 + E
	K4B = **K** + 4 + B	
	D4 = **K** + D + 4	
K4 = **K** + 4	**DE** = **K** + D + E	
KE = **K** + E	**DB** = **K** + D + B	
KB = **K** + B	**S4** = **K** + T + 4	
D = **K** + D	**S5** = **K** + T + E	
T = **K** + T	**B** = **K** + T + B	
		K4.2 = **K** + 4 + .2
$\mathbf{T_c}$ = **K** + $\mathsf{T_c}$		**K4.3** = **K** + 4 + .3
Triv = **K** + Triv		**S4.2** = **K** + T + 4 + .2
Ver = **K** + Ver	$\mathbf{KAlt_n}$ = **K** + $\mathsf{Alt_n}$	**S4.3** = **K** + T + 4 + .3

Um die Komplexität modaler Systeme zu untersuchen, ist es hilfreich zu wissen, welche der aufgeführten Systeme mit anderen in Inklusionsbeziehung stehen oder sogar zusammenfallen. Es muss also für jedes Paar Λ_1, Λ_2 von Logiken geprüft werden, ob die Beziehung $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$ (bzw. wenn $\vdash_{\Lambda_1} \varphi$, dann $\vdash_{\Lambda_2} \varphi$) gilt oder nicht.

Dieses Kriterium ist auf syntaktischem Weg jedoch nur sehr schwer zu überprüfen. So müsste man für $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$ zeigen, dass sich alle Axiome, die Λ_1 definieren, aus denen für Λ_2 mittels der Inferenzregeln beweisen lassen. Solch einen modallogischen Beweis zu finden, ist mitunter kompliziert. Um jedoch zu zeigen, dass es *keinen* modallogischen Beweis für alle Axiome von Λ_1 aus denen für Λ_2 gibt, reichen die zur Verfügung stehenden syntaktischen Mittel nicht aus.

Deshalb ist ein semantisches Kriterium erforderlich, um das Gelten oder Nichterfülltsein einer Inklusionsbeziehung zwischen zwei Logiken zu zeigen. Die Grundlage dafür bilden die Begriffe der Korrektheit und Vollständigkeit logischer Systeme, die eine Verbindung von Syntax und Semantik schaffen und damit in vieler Hinsicht von großer Bedeutung für die Theorie modaler Logiken sind.

Definition 1.8 *Seien Λ ein logisches System und $\mathfrak{F}$ eine Klasse von Rahmen.*

(1) *$\mathtt{L}_{\mathfrak{F}}$ bezeichnet die Menge aller Formeln φ, für die $\mathcal{F} \models \varphi$ für alle $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ gilt.*
(2) *Λ heißt **korrekt** bezüglich $\mathfrak{F}$, falls $\Lambda \subseteq \mathtt{L}_{\mathfrak{F}}$ gilt.*
(3) *Λ heißt **vollständig** bezüglich $\mathfrak{F}$, falls $\Lambda \supseteq \mathtt{L}_{\mathfrak{F}}$ gilt.*
(4) *Λ heißt **durch $\mathfrak{F}$ bestimmt**, falls Λ korrekt und vollständig bezüglich $\mathfrak{F}$ ist.*

Alle in dieser Arbeit behandelten Systeme sind bestimmt durch die Klasse aller Rahmen mit derjenigen Eigenschaft, die mit der Axiomatisierung des entsprechenden Systems korrespondiert. So sind beispielsweise **K** durch die Klasse *aller* Rahmen, **T** durch die Klasse aller reflexiven Rahmen und **S5** durch die Klasse aller reflexiven und euklidischen Rahmen und (da jede reflexive und euklidische Relation eine Äquivalenzrelation ist und umgekehrt) damit durch die Klasse aller Rahmen mit Äquivalenzrelationen bestimmt.

Die Beweise für die Vollständigkeit bedürfen umfangreicher Vorbetrachtungen und werden im Anhang A ausgeführt. Wie man die Korrektheit zeigt, wird im Folgenden angedeutet:

Sei $\Lambda = \mathsf{K} + A$ ein normales System, wobei A ein Axiom (oder eine Konjunktion von Axiomen) ist, mit welchem eine Eigenschaft P von Rahmen korrespondiert. Die Klasse aller Rahmen mit P heiße $\mathfrak{F}$. Die Korrespondenzeigenschaft bedeutet also

$$\mathcal{F} \models A \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \mathcal{F} \in \mathfrak{F}$$

für alle Rahmen $\mathcal{F}$ gilt. Das heißt insbesondere auch, dass A in allen Rahmen aus $\mathfrak{F}$ wahr ist. Um zu beweisen, dass *alle* Theoreme von Λ in allen Rahmen aus $\mathfrak{F}$ wahr sind, muss noch gezeigt werden, dass die Inferenzregeln die Wahrheit in einem beliebigen Rahmen bewahren. Letzteres ist eine allgemein bekannte Eigenschaft und wird hier nicht bewiesen. Wichtig ist die Folgerung

$$\mathcal{F} \models A \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \mathcal{F} \models \Lambda \tag{1.1}$$

für alle Rahmen $\mathcal{F}$.

Mit Hilfe der Korrektheit und Vollständigkeit aller betrachteten Systeme lässt sich nun ein leichter zu überprüfendes Kriterium dafür angeben, welche Inklusionsbeziehungen bestehen und welche nicht:

Lemma 1.9 *Seien A_1, A_2 Axiome (bzw. Konjunktionen von mehreren Axiomen), P_1 bzw. P_2 die korrespondierenden Eigenschaften von Rahmen sowie $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ die Klassen aller Rahmen, die die Eigenschaft P_1 bzw. P_2 haben. Ferner seien die normalen modalen Systeme $\Lambda_1 = \mathsf{K} + A_1$ und $\Lambda_2 = \mathsf{K} + A_2$ durch die Klassen $\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_2$ von Rahmen bestimmt. Dann gilt:*

$$\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \qquad \textit{genau dann, wenn} \qquad \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$$

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Wenn $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, dann gilt für alle Rahmen $\mathcal{F}$: wenn $\mathcal{F} \models \Lambda_2$, dann $\mathcal{F} \models \Lambda_1$. Wegen (1.1) folgt daraus: wenn $\mathcal{F} \models A_2$, dann $\mathcal{F} \models A_1$. Auf Grund der Korrespondenzeigenschaften folgt daraus: wenn $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_2$, dann $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_1$, also $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$.

„$\Leftarrow$“: Aus $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$ folgt $\mathtt{L}_{\mathfrak{F}_1} \subseteq \mathtt{L}_{\mathfrak{F}_2}$, und da beide Systeme durch $\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_2$ bestimmt sind, folgt daraus wiederum $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$.

$\square$

Dieses Kriterium erlaubt nun eine rein semantische Prüfung, ob ein modales System ein anderes enthält oder nicht. So kann man beispielsweise die Beziehung $\mathsf{S4} \subset \mathsf{S5}$ beweisen, indem man zeigt, dass alle Rahmen mit Äquivalenzrelation auch reflexiv und transitiv sind, aber dass es reflexive, transitive Rahmen gibt, deren Relation keine Äquivalenzrelation ist. Das Vergleichen von Logiken wird also auf das Vergleichen von Klassen von Relationen zurückgeführt.

Im Anhang B werden alle nötigen Vergleiche zwischen den für diese Arbeit relevanten normalen modalen Systemen vorgenommen. Abbildung 1.3 gibt alle Beziehungen zwischen diesen Systemen wieder. Dabei führt genau dann ein Pfeil von Λ_1 nach Λ_2, wenn $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$ gilt.

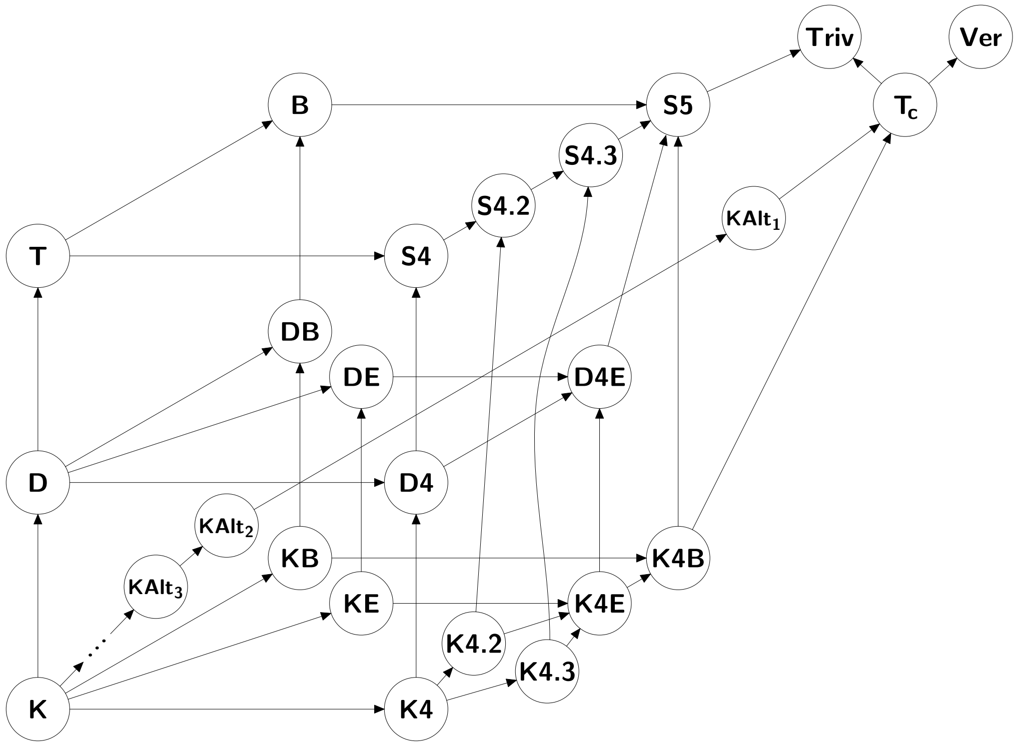

Abbildung 1.3: Hierarchie normaler modaler Logiken.

1.6 Erweiterungen der modalen Grundsprache

Multimodale Logik. Besonders in der epistemischen Logik – also dann, wenn man modale Logik zur Wissensrepräsentation anwendet – entsteht häufig das Bedürfnis nach mehreren Modalitäten, um beispielsweise über das Wissen mehrerer Agenten urteilen zu können. Eine einfache Erweiterung der (uni-)modalen Grundsprache macht das möglich: Anstelle der Operatoren $\Box$ und $\Diamond$ werden n Operatoren $\Box_1, \ldots, \Box_n$ bzw. $\Diamond_1, \ldots, \Diamond_n$ verwendet. Oftmals schreibt man statt $\Box_i\varphi$ auch $K_i\varphi$ und liest das als: „Agent i weiß, dass φ."

Die Semantik multimodaler Logik unterscheidet sich von derjenigen der unimodalen dadurch, dass ein Rahmen nicht mehr eine Relation, sondern eine Menge $\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ von n Relationen enthält. Dabei entspricht jedes R_i dem modalen Operator K_i, d. h. eine Formel $K_i\varphi$ ist wahr in einer Welt w genau dann, wenn für alle v gilt: Wenn wR_iv, dann ist φ in v wahr.

Multimodale Logik kennt noch mehr Erweiterungen: Betrachtet man eine Menge $G \subseteq \{1, \ldots, n\}$ (die man als „Gruppe" von Agenten auffassen kann), so kann man einen weiteren Operator E_G für das Wissen aller Agenten aus G einführen. $E_G\varphi$ ist dann eine Kurzschreibweise für die Konjunktion $\bigwedge_{i \in G} K_i\varphi$. Will man über das „Allgemeinwissen" der Gruppe G urteilen (also „jeder weiß φ, und jeder weiß das, und jeder weiß wiederum das usw.“), so kann man den Operator C_G verwenden, der mit der Schreibweise $C_G\varphi$ die (unendliche!) Konjunktion $E_G\varphi \wedge E_GE_G\varphi \wedge \ldots$ zusammenfasst. Für Wissen, das in der Gruppe G verteilt ist, gibt es den Operator D_G.

Systeme mit n modalen K-Operatoren werden so axiomatisiert, dass jedes Axiom in n verschiedenen „K_i-Versionen“ auftritt. Solche Systeme werden mit dem Index n am Ende oder in der Mitte des Namens versehen. Treten zusätzliche Operatoren etwa der Sorten E, C oder D auf, dann wird entweder der Name des Systems zusätzlich gekennzeichnet oder diese Tatsache explizit vermerkt.

Temporale Logik. Wenn man modale Logik verwendet um zu berücksichtigen, dass Aussagen zu unterschiedlichen Zeitpunkten verschiedene Wahrheitswerte haben können, dann bedient man sich der modalen Operatoren F, P und G, H an Stelle von $\Diamond$ bzw. $\Box$, wie in Abschnitt 1.2 erwähnt. Diese Erweiterung kennzeichnet man mit einem t im Namen des entsprechenden modalen Systems.

Auch hier ist zu beachten, dass jedes Axiom, das ein temporales System charakterisiert, in einer F-G- und einer P-F-Variante auftritt. Will man von bestimmten Axiomen nur eine der beiden Varianten zulassen (z. B. beim Axiom .3), dann kennzeichnet man die entsprechende Stelle im Namen mit dem Index l (für F und G) oder r (für P und F).

Auf semantischer Ebene bezeichnet man die Welten, in denen Formeln ausgewertet werden, als (Zeit-)Punkte. Die Relation, in der Zeitpunkte zueinander stehen, wird mit $<$ bezeichnet, und der Sachverhalt $s < t$ wird interpretiert als „Zeitpunkt s ist früher als Zeitpunkt t“.

Je nachdem, welche Eigenschaften der „natürlichen“ Zeit man für eine Anwendung voraussetzt, gibt es die vielfältigsten Möglichkeiten, temporale Systeme zu charakterisieren. Eine typische temporale Logik ist $\mathbf{K_t4.3}$, die für Anwendungen geeignet ist, in denen die „früher als“-Relation der Zeit transitiv und ohne Vorwärtsverzweigung ist. Wichtig ist in diesem Zusammenhang die Feststellung, dass sich bestimmte Eigenschaften wie Irreflexivität, Asymmetrie und Antisymmetrie *nicht* axiomatisieren lassen. Der Beweis dieser Tatsache benutzt Techniken, auf die in dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden kann.

Auch die temporale Sprache kennt noch mehr Erweiterungen, wie den „next time“-Operator für diskrete Zeit oder die „since“-/„until“-Operatoren. Darauf wird hier ebenfalls nicht weiter eingegangen.

1.7 Mehr über Rahmen und Modelle

Um die Komplexität modaler Logiken untersuchen zu können, sind einige Begriffe und Eigenschaften erforderlich, die sich auf Rahmen und Modelle beziehen.

Definition 1.10 *Sei R eine binäre Relation über W, und seien $v, w \in W$ sowie $n \geq 1$. Dann heißt v von w aus* ***in n Schritten sichtbar*** *(kurz: $wR^n v$) genau dann, wenn Folgendes gilt:*

(1) wRv, falls $n = 1$,

(2) Es existieren $u_1, \ldots, u_{n-1}$ mit wRu_1, u_1Ru_2, $\ldots$, $u_{n-2}Ru_{n-1}$, $u_{n-1}Rv$, falls $n > 1$.

Definition 1.11 *Sei Λ ein modales System.*

(1) Ein Rahmen $\mathcal{F}$ heißt ***Λ-Rahmen*** *(oder Rahmen für Λ) genau dann, wenn $\mathcal{F} \models \Lambda$ gilt, d. h. $\mathcal{F} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Lambda$.*

(2) Ein Modell $\mathcal{M}$ heißt ***Λ-Modell*** *(oder Modell für Λ) genau dann, wenn es auf einem Λ-Rahmen basiert.*

Definition 1.12 *Seien $\mathcal{F} = (W, R)$ ein Rahmen und $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ein Modell.*

(1) Ein Rahmen $\mathcal{F}' = (W', R')$ ist ein ***Teilrahmen*** *von $\mathcal{F}$ genau dann, wenn $W' \subseteq W$ und $R' = R \cap (W' \times W')$ gelten.*

(2) Ein Modell $\mathcal{M}' = (W', R', V)$ ist ein ***Teilmodell*** *von $\mathcal{M}$ genau dann, wenn es auf einem Teilrahmen von $\mathcal{F}$ basiert.*

(3) Für eine Teilmenge W' von W bezeichnet ***das auf W' eingeschränkte Modell*** *$\mathcal{M}\restriction_{W'}$ dasjenige Teilmodell von $\mathcal{M}$, dessen Menge von Welten W' ist.*

In vielen Anwendungen modaler Logiken möchte man von zwei Modellen oder Rahmen feststellen, ob sie ähnliche Struktur haben oder ob sie sich hinsichtlich der Menge aller Formeln, die in ihnen wahr sind, gleichen. Dafür sind spezielle Arten von Teilmodellen und -rahmen sowie bestimmte Arten von Morphismen sehr nützlich. Da diese Begriffe und die dadurch implizierten Eigenschaften auch für manche der späteren Komplexitätsbetrachtungen wichtig sind, werden sie im Folgenden eingeführt. Die nur für Modelle angegebenen Definitionen lassen sich analog auch auf Rahmen übertragen.

Definition 1.13 *Seien $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ein Modell und $W' \subseteq W$.*

(1) Ein Teilmodell $\mathcal{M}' = (W', R', V)$ von $\mathcal{M}$ heißt ***erzeugtes Teilmodell*** *von $\mathcal{M}$ genau dann, wenn für alle $w \in W'$ und alle $v \in W$ gilt: Wenn wRv, dann $v \in W'$.*

(2) Das kleinste erzeugte Teilmodell von $\mathcal{M}$, dessen Menge von Welten W' enthält, heißt das ***von W' erzeugte Teilmodell*** *von $\mathcal{M}$.*

(3) Ein von einer einelementigen Menge erzeugtes Teilmodell heißt ***punktgeneriertes*** *Teilmodell.*

Sind $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ein Modell, $\mathcal{M}' = (W', R', V)$ ein erzeugtes Teilmodell von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F}'$ die zugrunde liegenden Rahmen, so gilt für jede Formel φ und jede Welt $w \in W'$:

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \mathcal{M}', w \models \varphi.$$

Diese Aussage ist allgemein bekannt und lässt sich per Induktion über den Aufbau von φ beweisen. Sie impliziert auch die Feststellungen

$$\begin{array}{llll} \text{Wenn} & \mathcal{M} \models \varphi, & \text{dann} & \mathcal{M}' \models \varphi \quad \text{und} \\ \text{Wenn} & \mathcal{F} \models \varphi, & \text{dann} & \mathcal{F}' \models \varphi. \end{array}$$

Der Übergang zu einem erzeugten Teilmodell bewahrt also die Gültigkeit modaler Formeln. Daraus folgt auch, dass alle axiomatisierbaren semantischen Eigenschaften des ursprünglichen Modells (wie z. B. Transitivität, Reflexivität u. v. a.) ebenfalls für das erzeugte Teilmodell gelten.

Die folgenden drei Begriffe bezeichnen Abbildungen zwischen Modellen, die deren Struktur bewahren:

Definition 1.14 *Seien $\mathcal{M}_1 = (W_1, R_1, V_1)$ und $\mathcal{M}_2 = (W_2, R_2, V_2)$ zwei Modelle und $f : W_1 \to W_2$ eine Abbildung.*

*(1) f heißt **Homomorphismus** von $\mathcal{M}_1$ nach $\mathcal{M}_2$ genau dann, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

  (i) Für alle $v, w \in W_1$ gilt: Wenn vR_1w, dann $f(v)R_2f(w)$,

  (ii) Für alle $p \in \Phi$ und alle $w \in W_1$ gilt: Wenn $w \in V_1(p)$, dann $f(w) \in V_2(p)$.

*(2) f heißt **Isomorphismus** von $\mathcal{M}_1$ nach $\mathcal{M}_2$ genau dann, wenn f bijektiv ist und folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

  (i) Für alle $v, w \in W_1$ gilt: vR_1w genau dann, wenn $f(v)R_2f(w)$,

  (ii) Für alle $p \in \Phi$ und alle $w \in W_1$ gilt: $w \in V_1(p)$ genau dann, wenn $f(w) \in V_2(p)$.

*(3) f heißt **beschränkter Morphismus** von $\mathcal{M}_1$ nach $\mathcal{M}_2$ genau dann, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

  (i) Für alle $v, w \in W_1$ gilt: Wenn vR_1w, dann $f(v)R_2f(w)$,

  (ii) Für alle $p \in \Phi$ und alle $w \in W_1$ gilt: $w \in V_1(p)$ genau dann, wenn $f(w) \in V_2(p)$.

  (iii) Für alle $v_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ mit $f(v_1)R_2w_2$ existiert ein $w_1 \in W_1$ mit $v_1R_1w_1$ und $f(w_1) = w_2$.

Homomorphismen bewahren einen großen Teil der Struktur von Modellen, aber nicht notwendigerweise die Wahrheit modaler Formeln.

Zueinander isomorphe Modelle besitzen die gleiche Struktur und die gleichen Theorien. Ist f ein Isomorphismus von $\mathcal{M}_1$ nach $\mathcal{M}_2$, so gelten folgende Aussagen:

(1) Für alle $\varphi \in \mathrm{Fma}(\Phi)$ und alle $w \in W_1$ gilt: $\mathcal{M}_1, w \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}_2, f(w) \models \varphi$.
(2) Für alle $\varphi \in \mathrm{Fma}(\Phi)$ gilt: $\mathcal{M}_1 \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}_2 \models \varphi$.

Beschränkte Morphismen bewahren einen großen Teil der Struktur von Modellen und die Wahrheit modaler Formeln. Ist $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ ein beschränkter Morphismus (wobei die Modelle $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ auf den Rahmen $\mathcal{F}_1$ bzw. $\mathcal{F}_2$ basieren), so gilt Aussage (1) von den beiden obigen. Für surjektive beschränkte Morphismen $f : \mathcal{M}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{M}_2$ ist bekannt, dass die Aussagen

$$\begin{array}{llll} \text{Wenn} & \mathcal{M}_1 \models \varphi, & \text{dann} & \mathcal{M}_2 \models \varphi \quad \text{und} \\ \text{Wenn} & \mathcal{F}_1 \models \varphi, & \text{dann} & \mathcal{F}_2 \models \varphi. \end{array}$$

gelten. Hieraus folgt wieder, dass alle axiomatisierbaren semantischen Eigenschaften von $\mathcal{M}_1$ ebenfalls für $\mathcal{M}_2$ gelten.

1.8 Eigenschaften modaler Logiken

Modelleigenschaften. Für viele logische Systeme ergibt sich aus dem Beweis für die Vollständigkeit quasi als „Nebenprodukt“ eine weitere wichtige Eigenschaft, die für Betrachtungen des Erfüllbarkeitsproblems von großer Bedeutung ist: die *endliche Modelleigenschaft* (englisch: *finite model property*). Eine Verschärfung ist die kleine Modelleigenschaft (*polysize model property*), die vor allem für die in Abschnitt 2.1 bewiesenen NP-Resultate wichtig ist.

Definition 1.15 *Seien Λ ein logisches System und $\mathfrak{M}$ eine Klasse von Modellen.*

*(1) Λ hat die **endliche Modelleigenschaft bezüglich** $\mathfrak{M}$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \models \Lambda$ gilt und jede erfüllbare Formel von einem Modell aus $\mathfrak{M}$ erfüllt wird, das endlich viele Welten besitzt.*

*(2) Λ hat die **endliche Modelleigenschaft** genau dann, wenn es die endliche Modelleigenschaft bezüglich irgendeiner Klasse von Modellen besitzt.*

*(3) Λ hat die **kleine Modelleigenschaft bezüglich** $\mathfrak{M}$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \models \Lambda$ gilt und ein Polynom f existiert, so dass jede erfüllbare Formel φ von einem Modell aus $\mathfrak{M}$ erfüllt wird, das höchstens $f(|\varphi|)$ Welten besitzt.*

Die endliche Rahmeneigenschaft mit und ohne Bezug auf eine Klasse von Rahmen ist analog definiert. Ohne Bezug auf eine Klasse von Rahmen ist die endliche Rahmeneigenschaft äquivalent zur endlichen Modelleigenschaft.

Für die meisten der in dieser Arbeit auftretenden modalen Systeme ist die endliche Modelleigenschaft bezüglich derjenigen Klasse von Modellen, die der Axiomatisierung entsprechen, bekannt. Auf die Techniken, die man für das Beweisen dieser Eigenschaften benötigt, kann hier nicht weiter eingegangen werden.

Eigenschaften spezieller Systeme. Für die späteren Kapitel ist die endliche Modelleigenschaft von $\mathbf{K_t4.3}$ bezüglich der Klasse aller Modelle mit transitiven und trichotomen Relationen von besonderer Bedeutung. Dabei sind die Trichotomie und weitere Begriffe für diese Art von Relationen wie folgt definiert:

Definition 1.16

*(1) Eine Relation R heißt **trichotom** genau dann, wenn für alle x, y gilt: $xRy \vee x = y \vee yRx$.*

*(2) Eine transitive, trichotome Relation heißt **schwache Totalordnung**.*

*(3) Ist R eine schwache Totalordnung über der Menge W, so heißt eine Welt $w \in W$ **maximal** (bzw. **minimal**) bezüglich einer Teilmenge V von W genau dann, wenn für alle $v \in V$ gilt: vRw (bzw. wRv).*

Des Weiteren soll hier auf einige wichtige Eigenschaften von **S4.3** und aller Systeme, die diese Logik enthalten, eingegangen werden. Diese Eigenschaften sind in [1, Abschn. 4.9] aufgestellt und bewiesen.

Sei Λ ein beliebiges modales System, das **S4.3** enthält. Die Logik **S4.3** ist durch die Axiome 4, T und .3 charakterisiert. Nach den Betrachtungen in Abschnitt 1.4 heißt das, dass jedes **S4.3**-Modell (und damit auch jedes Λ-Modell) transitiv, reflexiv und ohne Vorwärtsverzweigung ist. Daraus folgt wiederum, dass jedes punktgenerierte Teilmodell eines Λ-Modells diese drei Eigenschaften hat und überdies noch zusammenhängend ist. Letztere Eigenschaft ist wie folgt definiert:

Definition 1.17

*(1) Eine Relation R heißt **zusammenhängend** genau dann, wenn für alle x, y gilt: $xRy \vee yRx$.*

*(2) Ein Rahmen, der punktgeneriert, transitiv und zusammenhängend ist, heißt **spezieller S4.3-Rahmen**.*

Dabei ist Punkt (2) durch den Sachverhalt gerechtfertigt, dass die Eigenschaft, zusammenhängend zu sein, die Reflexivität und das Fehlen von Vorwärtsverzweigungen impliziert.

Jedes System Λ, das **S4.3** enthält, hat nach dem Satz von Bull ([1, Th. 4.96]) die endliche Rahmeneigenschaft. Außerdem gelten folgende Resultate:

Satz 1.18 ([1, Th. 4.101]) *Jede normale modale Logik, die* **S4.3** *enthält, wird von einer endlichen Menge von Axiomen generiert.*

Satz 1.19 ([1, Th. 4.103]) *Für jede normale modale Logik Λ mit* $\mathbf{S4.3} \subseteq \Lambda$ *gibt es eine endliche Menge $\mathfrak{N}$ endlicher spezieller* **S4.3***-Rahmen mit folgender Eigenschaft:*

Für jeden endlichen Rahmen $\mathcal{F}$ gilt $\mathcal{F} \models \Lambda$ genau dann, wenn $\mathcal{F}$ ein spezieller **S4.3***-Rahmen ist und kein surjektiver beschränkter Morphismus von $\mathcal{F}$ auf einen Rahmen in $\mathfrak{N}$ existiert.*

2 Komplexität

Für ein System Λ und eine Formel φ betrachte man die folgenden Fragestellungen:

(1) Ist φ in Λ beweisbar?
(2) Ist φ in allen Λ-Modellen wahr?
(3) Gibt es ein Λ-Modell, das φ erfüllt?

Bei jedem dieser Probleme (und noch weiteren) interessiert man sich zunächst dafür, ob es entscheidbar ist. Kann man das bejahen, so wird dadurch die Frage nach der Komplexität dieser Entscheidung in Abhängigkeit von der Länge der Formel φ aufgeworfen. Um diese Fragestellungen untersuchen zu können, müssen die genannten Probleme zunächst genau definiert werden:

Definition 2.1

*(1) Das **Beweisbarkeitsproblem** der modalen Logik Λ ist die Menge*

$$\Lambda\text{-PROVABLE} = \{\varphi : \vdash_\Lambda \varphi\}.$$

*(2) Das **Gültigkeitsproblem** der modalen Logik Λ ist die Menge*

$$\Lambda\text{-VALID} = \{\varphi : \varphi \textit{ ist in allen } \Lambda\textit{-Modellen wahr}\}.$$

*(3) Das **Erfüllbarkeitsproblem** der modalen Logik Λ ist die Menge*

$$\Lambda\text{-SAT} = \{\varphi : \varphi \textit{ wird von einem } \Lambda\textit{-Modell erfüllt}\}.$$

Einige wenige semantische Überlegungen zeigen, dass die beiden letzteren Probleme zueinander dual sind: Eine Formel φ ist genau dann in allen Λ-Modellen wahr, wenn es kein Λ-Modell gibt, dass $\neg\varphi$ erfüllt. Deshalb genügt es, die Komplexität eines der beiden Probleme zu untersuchen.

In diesem Kapitel wird das *Erfüllbarkeitsproblem* modaler Systeme betrachtet. Wie E. Grädel in [2] feststellt, ist dieses Problem für das grundlegende uni- wie multimodale System $\mathbf{K}_{(n)}$ entscheidbar und bleibt dies auch, wenn man bestimmte Erweiterungen zur modalen Grundsprache hinzunimmt. Dies bezeichnet er als „robuste“ Entscheidbarkeitseigenschaft modaler Logiken. Eine detaillierte Untersuchung einzelner Systeme bezüglich der Entscheidbarkeit ihres Erfüllbarkeitsproblems nehmen P. Blackburn, M. de Rijke und Y. Venema in [1, Abschn. 6.2–6.4] vor.

Die folgenden Untersuchungen werden sich mit der *Komplexität* des modalen Erfüllbarkeitsproblems beschäftigen. Begriffe wie Härte, Vollständigkeit, Zugehörigkeit zu einer Komplexitätsklasse oder auch die Komplexität selbst, die sich auf das Erfüllbarkeitsproblem einer modalen Logik beziehen, werden synonym auf die Logik angewendet. Für die Härte bezüglich einer Komplexitätsklasse wird dabei die m-Reduzierung zugrunde gelegt:

Definition 2.2 *Seien A, B Mengen und $\mathcal{C}$ ein Mengensystem.*

(1) A heißt auf B in polynomialer Zeit ***many-one-reduzierbar*** *genau dann, wenn es eine in polynomialer Zeit berechenbare Funktion f gibt mit*

$$\bigwedge_x (x \in A \iff f(x) \in B).$$

Dann schreibt man auch $A \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} B$.

(2) A heißt ***$\mathcal{C}$-hart*** *genau dann, wenn für alle $X \in \mathcal{C}$ gilt: $X \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} A$.*

(3) A heißt ***$\mathcal{C}$-vollständig*** *genau dann, wenn A in $\mathcal{C}$ liegt und $\mathcal{C}$-hart ist.*

Die Abschnitte dieses Kapitels beschäftigen sich mit der Frage, welche *normalen* modalen Systeme für die Komplexitätsklassen NP und PSPACE vollständig sind. Dabei werden vor allem unimodale Systeme untersucht. Wenn in Einzelfällen ein allgemeineres Ergebnis (etwa für ein temporales oder multimodales System) vorliegt, wird ausnahmsweise dieses angegeben.

Wenngleich PSPACE die wohl größte Bedeutung für modale Erfüllbarkeitsprobleme hat, richtet sich das Hauptaugenmerk hier auf NP. Für diese Klasse werden im ersten Abschnitt Resultate aus der Literatur zusammengetragen und eigene Ergebnisse bewiesen. Der zweite Abschnitt gibt einen Überblick über PSPACE-vollständige Systeme. Im letzten Abschnitt werden nach einer Zusammenfassung weiterführende und offene Fragestellungen behandelt.

2.1 NP-vollständige Systeme

Jede modale Logik Λ kann als eine Erweiterung der klassischen Aussagenlogik aufgefasst werden. Deshalb ist das Erfüllbarkeitsproblem für Λ mindestens so schwer wie SAT, also NP-hart. Diese Aussage, die in ähnlicher Formulierung in [1, S. 374] getroffen wird, soll hier genau bewiesen werden:

Lemma 2.3 *Jede modale Logik hat ein NP-hartes Erfüllbarkeitsproblem.*

Beweis. Sei Λ ein modales System. Es wird gezeigt, dass

$$\mathrm{SAT} \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} \Lambda\text{-SAT}$$

gilt, wobei die reduzierende Funktion die identische Funktion ist. Diese ist polynomial berechenbar, und es muss gezeigt werden, dass die Äquivalenz

$$\varphi \in \mathrm{SAT} \iff \varphi \in \Lambda\text{-SAT}$$

für alle aussagenlogischen Formeln φ gilt:

„$\Rightarrow$“: Wenn eine aussagenlogische Formel φ eine erfüllende Belegung β hat, dann wähle man einen beliebigen nicht leeren Λ-Rahmen $\mathcal{F} = (W, R)$, eine (modale) Belegungsfunktion V und eine Welt $w \in W$ derart, dass für alle atomaren Aussagen p gilt: $w \in V(p) \Leftrightarrow \beta(p) = 1$. Dann ist φ, als modale Formel aufgefasst, im Modell (W, R, V) erfüllbar, nämlich in w.

„$\Leftarrow$“: Ist eine aussagenlogische Formel φ in der Welt w eines Modells $\mathcal{M} = (W, R, V)$ erfüllt, dann wird φ von der aussagenlogischen Belegung β erfüllt, für die $\beta(p) = 1 \Leftrightarrow w \in V(p)$ für alle $p \in \Phi$ gilt.

$\square$

Es bleibt zu klären, welche normalen modalen Systeme *in* NP liegen. Gesucht sind in diesem Kapitel also nichtdeterministische Algorithmen, die das Erfüllbarkeitsproblem für bestimmte Logiken in polynomialer Zeit entscheiden. Eine wichtige Rolle spielt dabei die kleine Modelleigenschaft, die in Abschnitt 1.8 eingeführt wurde. Die Verwendung dieser Eigenschaft für den Beweis, dass eine modale Logik in NP liegt, geht zurück auf P. Blackburn, M. de Rijke und Y. Venema. Aus [1, Abschn. 6.6] stammen die folgenden beiden Lemmata mit hinreichenden Kriterien für die Zugehörigkeit eines modalen Systems zu NP.

Lemma 2.4 ([1, Lemma 6.35]) *Sei Λ eine konsistente modale Logik mit der kleinen Modelleigenschaft bezüglich einer Klasse $\mathfrak{M}$ von Modellen. Wenn das Problem $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ in bezüglich $|\mathcal{M}|$ polynomialer Zeit entscheidbar ist, dann hat Λ ein NP-vollständiges Erfüllbarkeitsproblem.*

Anmerkung. Für ein Modell $\mathcal{M} = (W, R, V)$ werden hier folgende Schreibweisen verwendet: $|\mathcal{M}| = |W|$ und $||\mathcal{M}|| = |W|+|R|$. $|\mathcal{M}|$ wird im Folgenden auch als *Größe* von $\mathcal{M}$ bezeichnet.

Beweis. Wie schon festgestellt, genügt es, einen NP-Algorithmus anzugeben, der für eine Formel φ entscheidet, ob diese in $\mathfrak{M}$ erfüllbar ist. Wegen der kleinen Modelleigenschaft von Λ gibt es also ein Polynom f, so dass für jede in $\mathfrak{M}$ erfüllbare Formel φ ein Modell $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ existiert, das höchstens $f(|\varphi|)$ Welten besitzt und φ erfüllt. Dieses Polynom ist dem Algorithmus bekannt, der zum Entscheiden der Erfüllbarkeit einer Formel φ die folgenden Schritte durchführt:

(1) Wähle nichtdeterministisch ein Modell $\mathcal{M}$, das höchstens Größe $f(|\varphi|)$ hat;
(2) Prüfe, ob $\mathcal{M}$ φ erfüllt – falls nicht: verwirf;
(3) Prüfe, ob $\mathcal{M}$ in $\mathfrak{M}$ liegt – falls ja: akzeptiere, falls nein: verwirf.

Dass alle diese Schritte in polynomialer Zeit durchzuführen sind, wird durch folgende Überlegungen sichergestellt:

(1) Um ein solches Modell zu wählen, sind folgende Teilschritte erforderlich:
   (i) Wähle $n < f(|\varphi|)$. $W = \{1, \ldots, n\}$ bildet die Menge der Welten von $\mathcal{M}$. Dazu muss lediglich die Binärdarstellung von n geraten werden, was bezüglich $|\varphi|$ logarithmische Zeit benötigt.
   (ii) Für je zwei Welten $w_1, w_2 \in W$ rate, ob $w_1 R w_2$. Das sind n^2 Einzelschritte.
   (iii) Für jedes $w \in W$ und jede atomare Aussage p, die in φ vorkommt, rate, ob $w \in V(p)$. Das sind höchstens $|\varphi| \cdot f(|\varphi|)$ Einzelschritte.

(2) Mit $|\mathcal{M}|$ ist auch $||\mathcal{M}||$ polynomial in $|\varphi|$. Seien weiterhin alle Teilformeln von φ in aufsteigender Länge mit $\psi_1, \ldots, \psi_k$ durchnummeriert. Daraus folgt $k \leq |\varphi|$ und $\psi_k = \varphi$. Außerdem gilt für alle $j \leq k$: Wenn ψ_i Teilformel von ψ_j, dann $i < j$.

Nun kann man für jedes $m \leq k$ induktiv zeigen, dass man in $\mathcal{O}(m \cdot ||\mathcal{M}||)$ für $j = 1, \ldots, m$ jede Welt w in $\mathcal{M}$ mit ψ_j bzw. $\neg\psi_j$ markieren kann, abhängig davon, ob ψ_j in w wahr ist oder nicht. Für den einzigen interessanten Fall $\psi_{m+1} = \Diamond\psi_j$, $j < m + 1$, wird w genau dann mit $\Diamond\psi_j$ markiert, falls es ein v mit wRv gibt, das mit ψ_j markiert ist. Dieser Schritt ist in Zeit $\mathcal{O}(||\mathcal{M}||)$ ausführbar.

Nun wird φ von $\mathcal{M}$ genau dann erfüllt, wenn es eine Welt w gibt, die mit φ markiert ist. Die gesamte Überprüfung, ob $\mathcal{M}$ φ erfüllt, ist somit in bezüglich $|\varphi|$ polynomialer Zeit durchführbar.

(3) Dieser Schritt benötigt nach Voraussetzung polynomiale Zeit.

□

Für die wichtige Forderung, dass die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{M}$ in polynomialer Zeit entscheidbar ist, geben P. Blackburn, M. de Rijke und Y. Venema noch ein leichter zu überprüfendes hinreichendes Kriterium an:

Lemma 2.5 ([1, Lemma 6.36]) *Wenn $\mathfrak{F}$ eine Klasse von Rahmen ist, die man durch eine prädikatenlogische Aussage*[1] *α definieren kann, dann ist das Problem $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ in bezüglich der Größe von $\mathcal{F}$ polynomialer Zeit entscheidbar.*

Beweis. Per Induktion über die Struktur von α wird gezeigt, dass die Überprüfung, ob α im Rahmen $\mathcal{F} = (W, R)$ gilt, in bezüglich der Größe von $\mathcal{F}$ polynomialer Zeit durchführbar ist. Dabei gelte $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$.

Induktionsanfang.

1. Fall: $\alpha = (t_1 = t_2)$. Dann können die Terme t_1 und t_2 nur Welten $w_1, w_2 \in W$ sein, und $w_1 = w_2$ ist in linearer Zeit entscheidbar.

2. Fall: $\alpha = t_1 R t_2$. Analog zum 1. Fall.

Induktionsschritt.

1. Fall: $\alpha = \neg\beta$. Dann wird α genau dann von $\mathcal{F}$ erfüllt, wenn $\mathcal{F}$ nicht β erfüllt. Nach Induktionsvoraussetzung ist das in polynomialer Zeit entscheidbar.

2. Fall: $\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2$. Analog zum 1. Fall.

3. Fall: $\alpha = \bigwedge_x \beta$. Dann darf β höchstens eine freie Variable enthalten, nämlich x. Damit die Formel sinnvoll für die Charakterisierung von $\mathfrak{F}$ ist, muss α äquivalent zur Formel $\bigwedge_{x \in W} \beta$ sein, welche man wiederum äquivalent zu $\alpha' = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n$ umformen kann. Dabei wird jedes β_i, $1 \leq i \leq n$, durch Substitution von x mit w_i gebildet. Die β_i haben dann keine freien Variablen, und somit folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass die Überprüfung, ob α' in $\mathcal{F}$ gilt, in polynomialer Zeit durchführbar ist.

□

[1]Gemeint ist hier eine prädikatenlogische Formel mit Gleichheit und ohne freie Variablen.

Diese beiden Lemmata sind wichtige Hilfsmittel, um die Zugehörigkeit modaler Systeme zu NP zu zeigen. Der anspruchsvollste Schritt dabei ist der Nachweis der kleinen Modelleigenschaft einer Logik. Zwei mögliche Techniken dafür werden in den folgenden Teilabschnitten behandelt.

2.1.1 Einfache Auswahlverfahren

In diesem Abschnitt werden einfache Auswahlverfahren angegeben, mit deren Hilfe man für die Logiken $\mathbf{K_nAlt_1}$, **S5**, **D4E**, **K4B**, **K4E**, $\mathbf{T_c}$, **Triv** und **Ver** aus einem erfüllenden Modell ein (ebenfalls erfüllendes) Modell polynomialer Größe konstruieren kann.

Satz 2.6 ([1, Th. 6.37]) $\mathbf{K_nAlt_1}$ *hat ein NP-vollständiges Erfüllbarkeitsproblem.*

Beweis. Um die kleine Modelleigenschaft zu zeigen, wird eine Auswahlfunktion angegeben, die für eine gegebene Formel φ ein erfüllendes Modell $\mathcal{M} = (W, \mathcal{R}, V)$ auf ein Teilmodell einschränkt, das φ ebenfalls erfüllt und bezüglich $|\varphi|$ nur polynomial viele Welten hat.

Eine solche Auswahlfunktion $s : \mathrm{Sub}(\varphi) \times W \rightarrow \mathfrak{P}(W)$ wird induktiv über den Aufbau von φ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} s(p, w) &= \{w\}, \qquad\qquad \text{für } p \in \Phi, \\ s(\neg\psi, w) &= s(\psi, w), \\ s(\psi_1 \wedge \psi_2, w) &= s(\psi_1, w) \cup s(\psi_2, w), \\ s(\Diamond_i \psi, w) &= \{w\} \cup \bigcup_{v : wR_iv} s(\psi, v). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Intuitiv kann man diese Funktion s so verstehen, dass $s(\varphi, w)$ nur diejenigen Welten auswählt, die zum Wahrheitswert von φ in w überhaupt beitragen.

Anhand der Definition (2.1) ist ersichtlich, dass $s(\varphi, w)$ auch w enthalten muss. Geht man nun zu $\mathcal{M}\restriction_{s(\varphi, w)}$ über, so gilt für alle Formeln φ, alle Modelle $\mathcal{M}$ und alle Welten w von $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \mathcal{M}\restriction_{s(\varphi, w)}, w \models \varphi. \tag{2.2}$$

Diese Aussage ist hier präziser wiedergegeben als in [1]. Der zugehörige Beweis per Induktion über den Formelaufbau ist keineswegs so trivial, dass er wie ebenda übergangen werden könnte:

Induktionsanfang.

1. Fall: $\varphi = p$ *für* $p \in \Phi$. (2.2) gilt: $\mathcal{M}\restriction_{s(\varphi, w)}$ erbt die Belegungsfunktion von $\mathcal{M}$.

2. Fall: $\varphi = \top$. (2.2) gilt, da $\top$ immer wahr ist.

Induktionsschritt.

1. Fall: $\varphi = \neg\psi$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, w \models \varphi &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \not\models \psi \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}{\restriction}_{s(\psi, w)}, w \not\models \psi \quad \text{(Induktionsvoraussetzung = IV)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}{\restriction}_{s(\varphi, w)}, w \models \varphi \quad \text{(da } s(\varphi, w) = s(\psi, w)\text{).}
\end{aligned}$$

2. Fall: $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, w \models \varphi &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models \psi_1 \text{ und } \mathcal{M}, w \models \psi_2 \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}{\restriction}_{s(\psi_1, w)}, w \models \psi_1 \text{ und } \mathcal{M}{\restriction}_{s(\psi_2, w)}, w \models \psi_2 \quad \text{(IV)} \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}{\restriction}_{s(\varphi, w)}){\restriction}_{s(\psi_1, w)}, w \models \psi_1 \text{ und } (\mathcal{M}{\restriction}_{s(\varphi, w)}){\restriction}_{s(\psi_2, w)}, w \models \psi_2 \\
&\qquad \text{(da } s(\psi_i, w) \subseteq s(\varphi, w)\text{)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}{\restriction}_{s(\varphi, w)}, w \models \psi_1 \text{ und } \mathcal{M}{\restriction}_{s(\varphi, w)}, w \models \psi_2 \quad \text{(IV)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}{\restriction}_{s(\varphi, w)}, w \models \varphi.
\end{aligned}$$

3. Fall: $\varphi = \Diamond_i \psi$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, w \models \varphi &\Leftrightarrow \text{Es ex. } v \in W : wR_iv \text{ und } \mathcal{M}, v \models \psi \\
&\Leftrightarrow \text{Es ex. } v \in s(\varphi, w) : wR_iv \text{ und } \mathcal{M}, v \models \psi \\
&\qquad \text{(nach Konstruktion von } s\text{)} \\
&\Leftrightarrow \text{Es ex. } v \in s(\varphi, w) : wR_iv \text{ und } \mathcal{M}{\restriction}_{s(\psi, v)}, v \models \psi \quad \text{(IV)} \\
&\Leftrightarrow \text{Es ex. } v \in s(\varphi, w) : wR_iv \text{ und } (\mathcal{M}{\restriction}_{s(\varphi, w)}){\restriction}_{s(\psi, v)}, v \models \psi \\
&\qquad \text{(da für } v \text{ mit } wR_iv\text{: } s(\psi, v) \subseteq s(\varphi, w)\text{)} \\
&\Leftrightarrow \text{Es ex. } v \in s(\varphi, w) : wR_iv \text{ und } \mathcal{M}{\restriction}_{s(\varphi, w)}, v \models \psi \quad \text{(IV)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}{\restriction}_{s(\varphi, w)}, w \models \varphi.
\end{aligned}$$

Dass $\mathcal{M}{\restriction}_{s(\varphi, w)}$ wieder ein $\mathbf{K_nAlt_1}$-Modell ist, ist sofort ersichtlich. Für jedes $\mathbf{K_nAlt_1}$-Modell $\mathcal{M}$ hat $\mathcal{M}{\restriction}_{s(\varphi, w)}$ tatsächlich polynomiale Größe bezüglich $|\varphi|$, denn nach Konstruktion von s gilt sogar $|s(\varphi, w)| \leq |\varphi| + 1$. Das induktive Argument hierfür liegt auf der Hand und benutzt die Eigenschaft, dass jede Relation R_i in $\mathbf{K_nAlt_1}$-Modellen eine partielle Funktion ist.

Da außerdem die Klasse aller $\mathbf{K_nAlt_1}$-Rahmen mittels der prädikatenlogischen Aussage

$$\bigwedge_{i \in \{1, \ldots, n\}} \bigwedge_{u,v,w \in W} ((uR_iv \wedge uR_iw) \Rightarrow v = w)$$

definierbar ist, folgt wegen Lemma 2.5, dass das Problem „Ist $\mathcal{M}$ ein $\mathbf{K_nAlt_1}$-Modell?“ in polynomialer Zeit entscheidbar ist.

Nach Lemma 2.4 hat somit $\mathbf{K_nAlt_1}$ ein NP-vollständiges Erfüllbarkeitsproblem. □

P. Blackburn, M. de Rijke und Y. Venema erwähnen in [1] auch, dass man das NP-Resultat für **S5** auf ähnliche Weise erhält, führen jedoch keine Details dazu aus. Das gleiche Resultat *mit* Beweis findet man bei R. E. Ladner in [5] sowie bei J. Y. Halpern und Y. Moses in [3]. Im Folgenden wird eine an die hier verwendete Notation angepasste Variante des Beweises aus [3] vorgestellt.

Satz 2.7 ([5, Th. 6.2], [3, Prop. 6.2]) **S5** *hat ein NP-vollständiges Erfüllbarkeitsproblem.*

Beweis. Um die kleine Modelleigenschaft von **S5** zu zeigen, wird die gleiche Idee wie im vorhergehenden Beweis zugrunde gelegt: Betrachtet man eine Formel φ mit m Vorkommen modaler Operatoren, so kann man mittels eines relativ einfachen Auswahlverfahrens aus jedem erfüllenden **S5**-Modell ein erfüllendes **S5**-Teilmodell mit höchstens $m + 1$ Welten bilden.

Sei also eine solche Formel φ in einer Welt w eines **S5**-Modells erfüllt. Dann kann man zum von $\{w\}$ erzeugten Teilmodell übergehen, das ebenfalls φ in w erfüllt und ein **S5**-Modell ist (s. dazu die Bemerkungen nach Def. 1.13). Dieses Teilmodell sei mit $\mathcal{M} = (W, R, V)$ bezeichnet.

Wenn $W = \{w\}$, dann hat $\mathcal{M}$ trivialerweise höchstens $m + 1$ Welten.

Enthält W außer w noch andere Welten, dann sind alle diese Welten von w aus in endlich vielen Schritten sichtbar. Da R eine Äquivalenzrelation ist (jede reflexive, euklidische Relation ist transitiv und symmetrisch, s. a. Anhang B.1), bedeutet das, dass in $\mathcal{M}$ jede Welt mit jeder in Relation steht. Daraus folgt insbesondere, dass eine Formel $\Diamond\psi$ genau dann in w wahr ist, wenn sie in *allen* Welten aus W wahr ist.

Nun sei die Menge aller Teilformeln der Form $\Diamond\psi$ von φ, die in w wahr sind, mit F bezeichnet. Für jedes $\Diamond\psi \in F$ sei eine Welt w_ψ mit $\mathcal{M}, w_\psi \models \psi$ gewählt. Dann bilde man $W' = \{w\} \cup \{w_\psi : \Diamond\psi \in F\}$ und $\mathcal{M}' = \mathcal{M}\restriction_{W'}$. $\mathcal{M}'$ hat nach Konstruktion höchstens $m + 1$ Welten und ist wieder ein **S5**-Modell.

Im Folgenden wird gezeigt, dass für alle Welten $w' \in W'$ und alle Teilformeln ψ von φ die Beziehung

$$\mathcal{M}, w' \models \psi \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \mathcal{M}', w' \models \psi \tag{2.3}$$

gilt. Daraus folgt wegen $w \in W'$ und $\mathcal{M}, w \models \varphi$ die gewünschte Eigenschaft $\mathcal{M}', w \models \varphi$. Der Nachweis der Beziehung (2.3) geschieht per Induktion über den Aufbau von ψ:

Induktionsanfang.

1. Fall: $\psi = p$ *für* $p \in \Phi$. (2.3) gilt, da $\mathcal{M}'$ die Belegungsfunktion von $\mathcal{M}$ erbt.

2. Fall: $\varphi = \top$. (2.3) gilt, da $\top$ immer wahr ist.

Induktionsschritt.

1. Fall: $\psi = \neg\vartheta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w' \models \neg\vartheta \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}, w' \not\models \vartheta \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}', w' \not\models \vartheta \qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}', w' \models \neg\vartheta. \end{aligned}$$

2. Fall: $\psi = \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$. Beweis analog zum vorhergehenden Fall.

3. Fall: $\psi = \Diamond\vartheta$. Sei $w' \in W'$. Die Gültigkeit beider Richtungen der Äquivalenz (2.3) ist durch folgende Überlegungen ersichtlich:

„$\Rightarrow$“: Wenn $\mathcal{M}, w' \models \Diamond\vartheta$, dann gilt wegen der oben angeführten Eigenschaften eines **S5**-Modells auch $\mathcal{M}, w \models \Diamond\vartheta$. Folglich ist die Formel $\Diamond\vartheta$ ein Element von F, und nach Konstruktion von W' existiert ein $w_\vartheta \in W'$ mit $\mathcal{M}, w_\vartheta \models \vartheta$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann auch $\mathcal{M}', w_\vartheta \models \vartheta$ und somit $\mathcal{M}', w' \models \Diamond\vartheta$.

„$\Leftarrow$“: Wenn $\mathcal{M}', w' \models \Diamond\vartheta$, dann existiert ein $v' \in W'$ mit $\mathcal{M}', v' \models \vartheta$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann auch $\mathcal{M}, v' \models \vartheta$, und somit gilt $\mathcal{M}, w' \models \Diamond\vartheta$.

Außerdem ist das Problem „Ist der Rahmen, auf dem $\mathcal{M}$ basiert, ein **S5**-Rahmen?“ nach Lemma 2.5 in polynomialer Zeit entscheidbar, da die für die Definition einer Äquivalenzrelation erforderlichen Eigenschaften selbstverständlich durch eine prädikatenlogische Aussage charakterisierbar sind (s. a. Abschnitt 1.4). Somit folgt die NP-Vollständigkeit von **S5** nach Lemma 2.4. □

Mit wenigen zusätzlichen Überlegungen lässt sich der Beweis für die NP-Vollständigkeit von **S5** auf die Systeme **D4E** und **K4B** übertragen, da deren Semantik der von **S5** sehr ähnlich ist. Mit weiteren Überlegungen kommt man sogar zu einem NP-Resultat für **K4E**.

Die folgenden drei Sätze haben die NP-Vollständigkeit dieser drei Systeme zum Inhalt, wobei der erste schon von J. Y. Halpern und Y. Moses in [3] formuliert, aber nicht bewiesen wurde.

Satz 2.8 ([3, Prop. 6.4]) **D4E** *hat ein NP-vollständiges Erfüllbarkeitsproblem.*

Beweis. Es genügt, die kleine Modelleigenschaft von **D4E** zu zeigen. Da die Klasse aller **D4E**-Rahmen durch eine prädikatenlogische Aussage definierbar ist, folgt die NP-Vollständigkeit nach den Lemmata 2.4 und 2.5.

Sind eine Formel φ und ein **D4E**-Modell, das φ in einer Welt w erfüllt, gegeben, dann kann man wieder zum von $\{w\}$ erzeugten Teilmodell übergehen, das ebenfalls φ in w erfüllt und ein **D4E**-Modell ist (s. dazu auch die Bemerkungen nach Def. 1.13). Dieses Teilmodell sei mit $\mathcal{M} = (W, R, V)$ bezeichnet. m sei die Anzahl der Vorkommen modaler Operatoren in φ.

Wenn $W = \{w\}$, dann hat $\mathcal{M}$ trivialerweise höchstens $m + 1$ Welten.

Enthält W außer w noch andere Welten, dann sind alle diese Welten von w aus in endlich vielen Schritten und wegen der Transitivität von R sogar in einem Schritt sichtbar. Wegen der Euklidizität folgt daraus, dass alle diese Welten untereinander und mit sich selbst in Relation stehen. Nun tritt genau einer der folgenden beiden Fälle ein:

1. Fall: wRw. Da jede Welt $v \neq w$ von w aus sichtbar ist, folgt wegen der Euklidizität auch vRw. Damit steht in $\mathcal{M}$ jede Welt mit jeder in Relation, und $\mathcal{M}$ ist ein **S5**-Modell, das φ erfüllt. Nach dem Beweis von Satz 2.7 existiert dann ein φ erfüllendes **S5**-Modell, das höchstens $m + 1$ Welten hat. Dieses Modell ist auch ein **D4E**-Modell.

2. Fall: Nicht wRw. In diesem Fall ist $\mathcal{M}$ zwar kein **S5**-Modell, aber da alle Welten außer w untereinander und mit sich selbst in Relation stehen, kann man das Auswahlverfahren aus dem Beweis von Satz 2.7 dennoch auf das Modell $\mathcal{M}$ anwenden. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Welten w_ψ nun aus $W \setminus \{w\}$ gewählt werden. Das konstruierte Teilmodell $\mathcal{M}\restriction_{W'}$, das höchstens $m+1$ Welten hat, ist dann auch wieder ein Modell für **D4E** und erfüllt φ in w. □

Satz 2.9 **K4E** *hat ein NP-vollständiges Erfüllbarkeitsproblem.*

Beweis. Wie im vorangehenden Beweis genügt es, die kleine Modelleigenschaft von **K4E** zu zeigen. Ausgehend von einer Formel φ mit m Vorkommen modaler Operatoren und einem **K4E**-Modell, das φ in w erfüllt, kann man wieder zum von $\{w\}$ erzeugten Teilmodell $\mathcal{M} = (W, R, V)$ übergehen. Wegen der Eigenschaften erzeugter Teilmodelle ist $\mathcal{M}$ ebenfalls ein **K4E**-Modell, das φ in w erfüllt.

Wenn $W = \{w\}$, dann hat $\mathcal{M}$ trivialerweise höchstens $m+1$ Welten.

Enthält W außer w noch andere Welten, dann sind alle anderen Welten von w aus in endlich vielen Schritten und wegen der Transitivität von R sogar in einem Schritt sichtbar. Wegen der Euklidizität stehen dann alle diese Welten untereinander und mit sich selbst in Relation. $\mathcal{M}$ ist dann ein **D4E**-Modell, und nach dem Beweis des vorangehenden Satzes existiert ein φ erfüllendes **D4E**-Modell mit höchstens $m+1$ Welten. Dieses Modell ist auch ein **K4E**-Modell. □

Satz 2.10 **K4B** *hat ein NP-vollständiges Erfüllbarkeitsproblem.*

Beweis. Es genügt wieder, die kleine Modelleigenschaft von **K4B** zu zeigen. Ausgehend von einer Formel φ mit m Vorkommen modaler Operatoren und einem **K4B**-Modell, das φ in w erfüllt, kann man wieder zum von $\{w\}$ erzeugten Teilmodell $\mathcal{M} = (W, R, V)$ übergehen, das ebenfalls ein **K4B**-Modell ist und φ in w erfüllt.

Wenn $W = \{w\}$, dann hat $\mathcal{M}$ trivialerweise höchstens $m+1$ Welten.

Enthält W außer w noch andere Welten, dann sind alle diese Welten von w aus in endlich vielen Schritten und wegen der Transitivität von R sogar in einem Schritt sichtbar. Wegen der Symmetrie ist dann w auch von allen diesen Welten aus sichtbar, und wegen der Transitivität folgt daraus nun, dass alle Welten aus W mit sich selbst und untereinander in Relation stehen. $\mathcal{M}$ ist dann ein **S5**-Modell, und nach dem Beweis von Satz 2.7 existiert ein φ erfüllendes **S5**-Modell mit höchstens $m+1$ Welten. Dieses Modell ist auch ein **K4B**-Modell. □

Das folgende Resultat stellt die wohl einfachste Anwendung der kleinen Modelleigenschaft dar:

Satz 2.11 *Die Logiken* $\mathbf{T_c}$, **Triv** *und* **Ver** *sowie ihre multimodalen Entsprechungen haben NP-vollständige Erfüllbarkeitsprobleme.*

Beweis. Sei Λ eines der genannten Systeme.

Λ besitzt die kleine Modelleigenschaft, denn wenn es für eine Formel φ ein Λ-Modell gibt, das φ in einer Welt w erfüllt, dann kann man zum von $\{w\}$ erzeugten Teilmodell übergehen, das ebenfalls φ in w erfüllt und ein Λ-Modell ist. (Falls Λ multimodal ist, muss man dazu Definition 1.13 für multimodale Semantik verallgemeinern.) Ein solches punktgeneriertes Teilmodell besteht jedoch für jedes der betrachteten Systeme aus genau einer Welt.

Da außerdem die Klasse von Λ-Rahmen mittels einer prädikatenlogischen Aussage definierbar ist, folgt die NP-Vollständigkeit von Λ nach den Lemmata 2.4 und 2.5. □

2.1.2 Auswahlverfahren mit Hilfe endlicher Modelle

In [1] findet sich auch das NP-Resultat für die temporale Logik $\mathbf{K_t4.3}$, die in Abschnitt 1.8 einer genaueren Betrachtung unterzogen wurde. Der Beweis des folgenden Satzes benutzt die endliche Modelleigenschaft von $\mathbf{K_t4.3}$ bezüglich der Klasse aller Modelle mit schwachen Totalordnungen, um aus einem erfüllenden Modell ein solches polynomialer Größe zu konstruieren.

Satz 2.12 ([1, Th. 6.38]) $\mathbf{K_t4.3}$ *hat ein NP-vollständiges Erfüllbarkeitsproblem.*

Beweis. Um die kleine Modelleigenschaft von $\mathbf{K_t4.3}$ zu zeigen, betrachte man wieder eine Formel φ, in der m verschiedene Modalitäten auftreten und die in einem beliebigen Modell dieser Logik erfüllbar ist. Wegen der endlichen Modelleigenschaft von $\mathbf{K_t4.3}$ existiert ein endliches Modell $\mathcal{M} = (T, <, V)$ mit einer schwachen Totalordnung, so dass für ein $t \in T$ gilt: $\mathcal{M}, t \models \varphi$. Aus $\mathcal{M}$ wird nun wie folgt durch Auswahl von Punkten ein Modell polynomialer Größe gebildet:

Seien $F\psi_1, \ldots, F\psi_k$ und $P\vartheta_1, \ldots, P\vartheta_l$ alle Teilformeln von φ, die die Form $F\psi$ bzw. $P\vartheta$ haben und in $\mathcal{M}$ erfüllt sind. Dann wähle man für jede Formel $F\psi_i$ einen Zeitpunkt $u_i \in T$ derart, dass $\mathcal{M}, u_i \models \psi_i$ und u_i ein *maximaler* Punkt in der $<$-Ordnung mit dieser Eigenschaft ist. Analog wählt man für jedes $P\vartheta_j$ ein $v_j \in T$, so dass $\mathcal{M}, v_j \models \vartheta_j$ und v_j *minimal* bezüglich dieser Eigenschaft ist.

Schränkt man nun das Modell $\mathcal{M}$ mit der Menge $T' = \{t, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l\}$ auf das Teilmodell $\mathcal{M}' = \mathcal{M}\restriction_{T'}$ ein, so kann man feststellen, dass dieses wieder eine schwache Totalordnung und zudem nur höchstens $m + 1$ Zeitpunkte besitzt. Die noch ausstehende Forderung $\mathcal{M}', t \models \varphi$ erhält man mit der Aussage, dass für alle Teilformeln $\psi \in \mathrm{Sub}(\varphi)$ und alle Zeitpunkte $t \in T'$

$$\mathcal{M}, t \models \psi \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \mathcal{M}', t \models \psi \tag{2.4}$$

gilt, was sich wie folgt durch Induktion über die Struktur von φ zeigen lässt:

Induktionsanfang.

1. Fall: $\psi = p$ *für* $p \in \Phi$. (2.4) gilt, da $\mathcal{M}'$ die Belegungsfunktion von $\mathcal{M}$ erbt.

2. Fall: $\varphi = \top$. (2.4) gilt, da $\top$ immer wahr ist.

Induktionsschritt.

1. Fall: $\psi = \neg\vartheta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, t \models \neg\vartheta &\Leftrightarrow \mathcal{M}, t \not\models \vartheta \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}', t \not\models \vartheta \qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}', t \models \neg\vartheta. \end{aligned}$$

2. Fall: $\psi = \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$. Beweis analog zum vorhergehenden Fall.

3. Fall: $\psi = F\vartheta$. Sei $t \in T'$. Die Gültigkeit beider Richtungen der Äquivalenz (2.4) ist durch folgende Überlegungen ersichtlich:

„$\Rightarrow$“: Wenn $\mathcal{M}, t \models F\vartheta$, dann ist ϑ eines der anfangs eingeführten ψ_i. Folglich gilt $\mathcal{M}, u_i \models \vartheta$ sowie $t < u_i$, da u_i gerade ein *maximaler* Zeitpunkt bezüglich der Eigenschaft $\mathcal{M}, u_i \models \vartheta$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann auch $\mathcal{M}', u_i \models \vartheta$, also $\mathcal{M}', t \models F\vartheta$.

„$\Leftarrow$“: Wenn $\mathcal{M}', t \models F\vartheta$, dann existiert ein $u \in T'$ mit $t < u$ und $\mathcal{M}', u \models \vartheta$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\mathcal{M}, u \models \vartheta$, also $\mathcal{M}, t \models F\vartheta$.

4. Fall: $\psi = P\vartheta$. Beweis analog zum vorhergehenden Fall.

Hiermit und aufgrund der Tatsache, dass sich auch die Klasse aller Rahmen mit schwachen Totalordnungen durch eine prädikatenlogische Aussage charakterisieren lässt, folgt nach den Lemmata 2.4 und 2.5 die NP-Vollständigkeit von $\mathbf{K_t4.3}$. $\square$

Das nun folgende Resultat aus [1] ist das wohl umfassendste: Alle normalen modalen Logiken, die **S4.3** enthalten, haben ein NP-vollständiges Erfüllbarkeitsproblem.

Um dieses Resultat zu beweisen, muss auf die im Abschnitt 1.8 behandelten Eigenschaften von Logiken, die **S4.3** enthalten, zurückgegriffen werden. Bevor die kleine Modelleigenschaft solcher Systeme gezeigt werden kann, ist das folgende Lemma erforderlich:

Lemma 2.13 ([1, Lemma 6.39]) *Seien $\mathcal{F}_1 = (W_1, R_1)$ und $\mathcal{F}_2 = (W_2, R_2)$ zwei endliche* **S4.3***-Rahmen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) Es existiert ein surjektiver beschränkter Morphismus von $\mathcal{F}_1$ nach $\mathcal{F}_2$.

(2) Es existiert ein Teilrahmen $\mathcal{F}_1'$ von $\mathcal{F}_1$, der eine maximale Welt von $\mathcal{F}_1$ enthält und zu $\mathcal{F}_2$ isomorph ist.

Beweis. Seien f ein surjektiver beschränkter Morphismus von $\mathcal{F}_1$ nach $\mathcal{F}_2$ und x eine maximale Welt aus $\mathcal{F}_1$. (Eine solche maximale Welt existiert immer, da $\mathcal{F}_1$ transitiv, endlich und punktgeneriert ist.) Weiterhin sei $W_1' \subseteq W_1$ gebildet aus x und je genau einer maximalen Welt aus jedem vollen Urbild $f^{-1}(\{w\})$ von Welten w aus W_2 mit $w \neq f(x)$.

Mit Hilfe der so gebildeten Menge W_1' wird $\mathcal{F}_1$ auf $\mathcal{F}_1' := \mathcal{F}_1\restriction_{W_1'}$ eingeschränkt. Nun ist noch zu zeigen, dass $\mathcal{F}_1'$ isomorph zu $\mathcal{F}_2$ ist. Setzt man dazu $f' := f|_{W_1'}$, so bleibt zu zeigen, dass f' der gesuchte Isomorphismus ist.

Die Abbildung f' ist bijektiv, da die Menge W_1 so konstruiert wurde, dass sie für jedes $w \in W_2$ genau eine Welt aus dessen Urbildmenge enthält. Für die Isomorphismuseigenschaft von f', nämlich

$$\bigwedge_{v_1,\, w_1 \in W_1'} (v_1 R_1 w_1 \Leftrightarrow f'(v_1) R_2 f'(w_1)),$$

folgt Richtung „$\Rightarrow$" daraus, dass f ein beschränkter Morphismus ist.

Richtung „$\Leftarrow$" ergibt sich wie folgt: Wenn für beliebige $v_1, w_1 \in W_1'$ die Beziehung $f'(v_1) R_2 f'(w_1)$ gilt, dann auch $f(v_1) R_2 f(w_1)$. Da f ein beschränkter Morphismus ist, muss es ein $u_1 \in W_1$ geben mit $v_1 R_1 u_1$ und $f(u_1) = f(w_1)$. Aus letzterem folgt aber, dass sowohl u_1 als auch w_1 in der Urbildmenge von $f(w_1)$ liegt. Da w_1 nach Konstruktion maximal in $f^{-1}(\{f(w_1)\})$ ist, gilt $u_1 R_1 w_1$ und wegen der Transitivität von R_1 auch $v_1 R_1 w_1$.

Für „(2) $\Rightarrow$ (1)" seien $W_1' \subseteq W_1$ und $x \in W_1'$ ein maximaler Punkt von $\mathcal{F}_1$. Sei weiterhin $\mathcal{F}_1' := \mathcal{F}_1 \restriction_{W_1'}$ und f' ein Isomorphismus von $\mathcal{F}_1'$ nach $\mathcal{F}_2$. Gesucht ist nun ein surjektiver beschränkter Morphismus von $\mathcal{F}_1$ nach $\mathcal{F}_2$. Dazu sei eine Abbildung $f : W_1 \to W_1'$ wie folgt definiert:

$$f(w_1) := \begin{cases} w_1, & \text{falls } w_1 \in W_1', \\ w_1' : w_1' \text{ minimal in } W_1' \text{ bzgl. } w_1 R_1 w_1', & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dass dadurch tatsächlich eine (totale) Abbildung definiert wird, ist leicht einzusehen: Für den „kritischen" Fall $w_1 \notin W_1'$ gilt mit Sicherheit $w_1 R_1 x$, und x ist aus W_1'. Also gibt es auch ein $w_1' \in W_1'$, das minimal bezüglich der Eigenschaft $w_1 R_1 w_1'$ ist.

Zeigt man nun, dass f ein surjektiver beschränkter Morphismus von $\mathcal{F}_1$ nach $\mathcal{F}_1'$ ist, so erhält man mit der Verkettung von f und f' den gewünschten Morphismus von $\mathcal{F}_1$ nach $\mathcal{F}_2$. Surjektiv ist f nach Definition, und ein beschränkter Morphismus ist f wegen folgender Überlegungen:

(1) Seien $v_1,\, w_1 \in W_1$ mit $v_1 R_1 w_1$. Falls $w_1 \notin W_1'$, so gilt $w_1 R_1 f(w_1)$ nach Definition von f. Für $w_1 \in W_1'$ folgt diese Beziehung aus der Reflexivität von R_1. Da R_1 transitiv ist, folgt $v_1 R_1 f(w_1)$.

Ist nun v_1 aus W_1', so gilt wegen der Reflexivität $f(v_1) R_1 v_1$, und damit folgt $f(v_1) R_1 f(w_1)$.

Für $v_1 \notin W_1'$ ist $f(v_1)$ nach Definition das *minimale* Element in W_1' mit $v_1 R_1 f(v_1)$. Also muss auch hier $f(v_1) R_1 f(w_1)$ gelten.

(2) Seien $v_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_1'$ mit $f(v_1) R_1 w_2$. Da $v_1 R_1 f(v_1)$ (s. oben), gilt wegen der Transitivität $v_1 R_1 w_2$. Nach Konstruktion von f ist nun w_2 die gesuchte Welt mit $v_1 R_1 w_2$ und $f(w_2) = w_2$.

□

Nun sind alle nötigen Vorbereitungen getroffen um zu zeigen, dass jede normale modale Logik, die **S4.3** übersteigt, die kleine Modelleigenschaft besitzt:

Lemma 2.14 ([1, Lemma 6.40]) *Sei Λ eine normale modale Logik mit* $\mathbf{S4.3} \subseteq \Lambda$. *Dann gilt: Jede Formel φ, die in einem Rahmen für Λ erfüllbar ist, ist in einem Rahmen für Λ erfüllbar, der höchstens $m + 2$ Welten besitzt. Dabei bezeichnet m die Anzahl des Auftretens modaler Operatoren in φ.*

Beweis. Sei φ eine in einem Rahmen für Λ erfüllbare Formel mit m Vorkommen modaler Operatoren. Nach dem Satz von Bull (siehe Abschnitt 1.8) hat Λ die endliche Rahmeneigenschaft. Es existiert also ein endliches Modell, das auf einem Λ-Rahmen basiert und φ in einer Welt w_0 erfüllt.

Man gehe nun von diesem Modell zu $\mathcal{M} = (W, R, V)$, dem von w_0 erzeugten Teilmodell, über. Auch dieses Modell erfüllt φ in w_0 und basiert auf einem Λ-Rahmen, da aufgrund der Feststellungen nach Definition 1.13 der Übergang zu erzeugten Teilmodellen und -rahmen modale Gültigkeit bewahrt.

Ausgehend von diesem Modell $\mathcal{M}$ wähle man nun wie folgt Welten aus:

- Seien $\Diamond\psi_1, \ldots, \Diamond\psi_k$ alle $\Diamond$-Teilformeln von φ, die in w_0 wahr sind. Für jedes $i = 1, \ldots, k$ sei w_i eine Welt, die maximal bezüglich der Eigenschaft, ψ_i zu erfüllen, ist.
- w_{k+1} sei eine maximale Welt des $\mathcal{M}$ zugrunde liegenden Rahmens.

Nun sei $\mathcal{M}' := \mathcal{M}\restriction_{\{w_0, \ldots, w_{k+1}\}}$. $\mathcal{M}'$ hat nach Konstruktion höchstens $m + 2$ Welten und basiert wieder auf einem Λ-Rahmen: Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ die $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}'$ zugrunde liegenden Rahmen, dann ist $\mathcal{F}'$ ein Teilrahmen von $\mathcal{F}$ mit einem maximalen Punkt. Damit gibt es nach Lemma 2.13 einen surjektiven beschränkten Morphismus von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{F}'$. Da solche Morphismen modale Gültigkeit bewahren (s. a. Bemerkungen nach Definition 1.14) und $\mathcal{F}$ ein Λ-Rahmen ist, ist $\mathcal{F}'$ auch einer.

Es bleibt zu zeigen, dass φ in $\mathcal{M}'$ an der Stelle w_0 wahr ist. Dies folgt aus der Aussage

$$\bigwedge_{\psi \in \mathrm{Sub}(\varphi)} \; \bigwedge_{i=0,\ldots,k+1} (\mathcal{M}, w_i \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}', w_i \models \psi)\,, \tag{2.5}$$

die mittels vollständiger Induktion über die Struktur von φ bewiesen wird:

Induktionsanfang.

1. Fall: $\psi = p$ *für* $p \in \Phi$. (2.5) gilt, da $\mathcal{M}'$ die Belegungsfunktion von $\mathcal{M}$ erbt.

2. Fall: $\varphi = \top$. (2.5) gilt, da $\top$ immer wahr ist.

Induktionsschritt.

1. Fall: $\psi = \neg\vartheta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, t \models \neg\vartheta \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}, t \not\models \vartheta \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}', t \not\models \vartheta \qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}', t \models \neg\vartheta. \end{aligned}$$

2. Fall: $\psi = \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$. Beweis analog zum vorhergehenden Fall.

3. Fall: $\psi = \Diamond\vartheta$. Sei $i \in \{0, \ldots, k + 1\}$. Die Gültigkeit beider Richtungen der Äquivalenz in (2.5) ist durch folgende Überlegungen ersichtlich:

„$\Rightarrow$“: Es gelte $\mathcal{M}, w_i \models \Diamond\vartheta$. Da R transitiv ist und $\mathcal{M}$ von w_0 erzeugt wird, gilt $w_0 R w_i$ und somit $\mathcal{M}, w_0 \models \Diamond\vartheta$ (auch wegen der Transitivität). Folglich ist ϑ eines der ψ_j.

Die Voraussetzung $\mathcal{M}, w_i \models \Diamond\psi_j$ bedeutet auch, dass es eine Welt x gibt mit $w_i R x$ und $\mathcal{M}, x \models \psi_j$. Da w_j eine maximale Welt ist bezüglich der Eigenschaft, ψ_j zu erfüllen, gilt $x R w_j$ und somit auch $w_i R w_j$. Da nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{M}', w_j \models \psi_j$, folgt $\mathcal{M}', w_i \models \Diamond\vartheta$.

„$\Leftarrow$“: Es gelte $\mathcal{M}', w_i \models \Diamond\vartheta$. Das heißt, es gibt ein $j \in \{0, \ldots, k+1\}$ mit $w_i R w_j$ und $\mathcal{M}', w_j \models \vartheta$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann auch $\mathcal{M}, w_j \models \vartheta$, also $\mathcal{M}, w_i \models \Diamond\vartheta$.

□

Satz 2.15 (Satz von Hemaspaandra) ([1, Th. 6.41])
Jede normale modale Logik Λ, die **S4.3** *enthält, hat ein NP-vollständiges Erfüllbarkeitsproblem.*

Beweis. Wegen Lemma 2.14 hat Λ die kleine Modelleigenschaft bezüglich der Klasse aller Λ-Rahmen. Nach Lemma 2.4 genügt es zu zeigen, dass die Zugehörigkeit zur Klasse von Λ-Rahmen in polynomialer Zeit entscheidbar ist. Das geschieht mit Hilfe von Satz 1.19 wie folgt:

Um zu prüfen, ob ein gegebener Rahmen $\mathcal{F}$ ein Λ-Rahmen ist, muss man demnach zuerst prüfen, ob $\mathcal{F}$ ein spezieller **S4.3**-Rahmen im Sinne der Definition 1.17 ist. Das ist nach Lemma 2.5 in polynomialer Zeit möglich, da die Klasse der speziellen **S4.3**-Rahmen mittels einer prädikatenlogischen Aussage definierbar ist.

Danach muss geprüft werden, ob es einen surjektiven beschränkten Morphismus auf einen Rahmen aus $\mathfrak{N}$ gibt. Da $\mathfrak{N}$ für Λ eine feste endliche Menge ist, genügt es zu zeigen, dass man für jeden einzelnen (festen) Rahmen $\mathcal{N}$ in polynomialer Zeit prüfen kann, ob es einen beschränkten Morphismus von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{N}$ gibt. Diese Prüfung ist nach Lemma 2.13 äquivalent zur Prüfung, ob es eine Menge V von Welten in $\mathcal{F}$ gibt, die eine maximale Welt enthält und für die $\mathcal{F}{\restriction_V}$ isomorph zu $\mathcal{N}$ ist. Dafür braucht man aber nur höchstens $|\mathcal{F}|^{|\mathcal{N}|}$ verschiedene injektive Abbildungen $f : \mathcal{F} \rightarrowtail \mathcal{N}$ zu überprüfen. Da $\mathcal{N}$ fest ist, sind das polynomial viele. Da jede einzelne Überprüfung höchstens $\mathcal{O}(|\mathcal{F}|)$ Zeit benötigt, ist also auch der gesamte zweite Schritt in polynomialer Zeit durchführbar. □

2.2 PSPACE-vollständige Systeme

PSPACE ist die Komplexitätsklasse mit der wohl größten Bedeutung für modale Logiken. Viele wichtige modale Erfüllbarkeitsprobleme liegen in PSPACE, und viele bekannte modale Logiken haben PSPACE-harte Erfüllbarkeitsprobleme. Unter der Voraussetzung, dass PSPACE-harte Mengen nicht in NP liegen, sind Erfüllbarkeitsprobleme modaler Logik damit schwieriger als das der klassischen Aussagenlogik.

Da das Hauptaugenmerk dieser Arbeit auf die Klasse NP gerichtet ist, werden die aus der Literatur ([1, Abschn. 6.7], [3], [5]) zusammengetragenen PSPACE-Resultate ohne Beweise angeführt. Der einzige Sachverhalt, auf den detailliert eingegangen wird, ist der folgende:

Satz 2.16 ([1, Th. 6.42]) K *hat nicht die kleine Modelleigenschaft.*

Beweis. Zum Beweis wird für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine erfüllbare Formel φ_m^{K} mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

(1) $|\varphi_m^{\mathsf{K}}|$ ist polynomial in m,

(2) Wenn φ_m^{K} in einer Welt w_0 eines Modells $\mathcal{M}$ wahr ist, dann hat $\mathcal{M}$ ein Teilmodell, das w_0 enthält und isomorph zum vollständigen binären Baum der Tiefe m ist.

Damit ist die Größe des kleinsten erfüllenden Modells von φ_m^{K} exponentiell in $|\varphi_m^{\mathsf{K}}|$.
Um φ_m^{K} zu konstruieren, werden die atomaren Aussagen $q_1, \ldots, q_m$ und $p_1, \ldots, p_m$ verwendet. Die q_i kennzeichnen die Tiefe im Baum, also den Abstand zu w_0 im erfüllenden Modell. Die p_i sind dafür zuständig, dass es auf der k-ten Ebene 2^k Welten gibt, die sich hinsichtlich der Belegungsfunktion paarweise unterscheiden.

Des Weiteren werden folgende Kurzschreibweisen vereinbart:

- $\Box^i\psi \;=\; \begin{cases} \psi, & \text{falls } i = 0,\\ \Box\Box^{i-1}\psi, & \text{sonst,} \end{cases}$

  $\Box^{(i)}\psi \;=\; \psi \wedge \Box\psi \wedge \ldots \wedge \Box^i\psi,$ jeweils für beliebige Formeln ψ.
- $D_i \;=\; \Box^{(m)}\left(q_i \to (\neg q_0 \wedge \ldots \wedge \neg q_{i-1} \wedge \neg q_{i+1} \wedge \ldots \wedge \neg q_m)\right), \qquad i = 0, \ldots, m:$

  Hiermit wird sichergestellt, dass in jeder Welt genau eines der q_i wahr ist.
- $B_i \;=\; q_i \to (\Diamond(q_{i+1} \wedge p_{i+1}) \wedge \Diamond(q_{i+1} \wedge \neg p_{i+1})), \qquad i = 0, \ldots, m-1:$

  Diese Formeln erzwingen eine Verzweigung in jeder Welt der i-ten Ebene zu zwei Welten der $(i+1)$-ten Ebene, die sich hinsichtlich der Belegungsfunktion unterscheiden.
- $S_i \;=\; (p_i \to \Box p_i) \wedge (\neg p_i \to \Box\neg p_i), \qquad i = 0, \ldots, m-1:$

  Die S_i bewirken, dass die „Wahrheitswerte“ der p_i auf die nächste Ebene weitergeleitet werden. Dadurch und durch die B_i wird erreicht, dass auf der $(i+1)$-ten Ebene doppelt so viele *verschiedene* Welten nötig sind wie auf der i-ten Ebene.

Die Formel φ_m^{K} setzt sich nun wie folgt aus den angeführten Bestandteilen zusammen:

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_m^{\mathsf{K}} & = & q_0 \;\wedge \\
& & \wedge\; D_0 \wedge \ldots \wedge D_m \;\wedge \\
& & \wedge\; B_0 \wedge \Box B_1 \wedge \Box^2 B_2 \wedge \Box^3 B_3 \wedge \ldots \wedge \Box^{m-1} B_{m-1} \;\wedge \\
& & \qquad \wedge\; \Box S_1 \wedge \Box^2 S_1 \wedge \Box^3 S_1 \wedge \ldots \wedge \Box^{m-1} S_1 \;\wedge \\
& & \qquad\qquad \wedge\; \Box^2 S_2 \wedge \Box^3 S_2 \wedge \ldots \wedge \Box^{m-1} S_2 \;\wedge \\
& & \qquad\qquad\qquad \wedge\; \Box^3 S_3 \wedge \ldots \wedge \Box^{m-1} S_3 \;\wedge \\
& & \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& & \qquad\qquad\qquad\qquad \wedge\; \Box^{m-1} S_{m-1}
\end{array}$$

Die erste Zeile bewirkt, dass in der Welt, in der φ_m^{K} erfüllt wird, Ebene 0 festgelegt wird. Die zweite Zeile stellt sicher, dass jede Ebene mit genau einer Nummer versehen wird. Durch die dritte und die letzten Zeilen werden, einfach ausgedrückt, Verzweigungen in jeder Ebene erzeugt beziehungsweise von Ebene zu Ebene weitergegeben.

Am einfachsten ist dieses komplizierte Gebilde wahrscheinlich zu verstehen, wenn man beispielsweise φ_2^{K} ausführt und ein erfüllendes Modell dazu konstruiert (s. dazu Abb. 2.1):

$$\begin{aligned}
\varphi_2^{\mathsf{K}} = q_0 \;\wedge \\
&\wedge\; (q_0 \to (\neg q_1 \wedge \neg q_2)) \;\wedge\; \Box(q_0 \to (\neg q_1 \wedge \neg q_2)) \;\wedge\; \Box^2(q_0 \to (\neg q_1 \wedge \neg q_2)) \;\wedge \\
&\wedge\; (q_1 \to (\neg q_0 \wedge \neg q_2)) \;\wedge\; \Box(q_1 \to (\neg q_0 \wedge \neg q_2)) \;\wedge\; \Box^2(q_1 \to (\neg q_0 \wedge \neg q_2)) \;\wedge \\
&\wedge\; (q_2 \to (\neg q_0 \wedge \neg q_1)) \;\wedge\; \Box(q_2 \to (\neg q_0 \wedge \neg q_1)) \;\wedge\; \Box^2(q_2 \to (\neg q_0 \wedge \neg q_1)) \;\wedge \\
&\wedge\; \quad (q_0 \to (\Diamond(q_1 \wedge p_1) \wedge \Diamond(q_1 \wedge \neg p_1))) \;\wedge \\
&\wedge\; \Box(q_1 \to (\Diamond(q_2 \wedge p_2) \wedge \Diamond(q_2 \wedge \neg p_2))) \;\wedge \\
&\wedge\; \Box((p_1 \to \Box p_1) \wedge (\neg p_1 \to \Box \neg p_1))
\end{aligned}$$

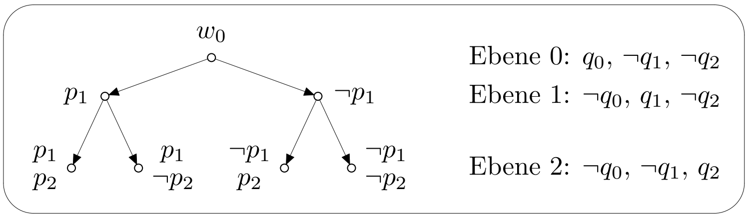

Abbildung 2.1: Beispiel-Modell für φ_2^{K}.

Man sieht nun leicht, dass φ_m^{K} immer erfüllbar ist und dass jedes erfüllende Modell ein Teilmodell hat, das isomorph zum vollständigen binären Baum der Tiefe m ist. Folglich hat jedes φ_m^{K} erfüllende Modell mindestens 2^m Welten. Da die Länge von φ_m^{K} aufgrund der angegebenen Konstruktionsvorschrift in $\mathcal{O}(m^3)$ liegt, ist die Größe des kleinsten erfüllenden Modells exponentiell in $|\varphi_m^{\mathsf{K}}|$. $\Box$

R. E. Ladner beweist in [5], dass die Erfüllbarkeitsprobleme der Systeme **K**, **T** und **S4** PSPACE-vollständig sind. Der zugehörige Satz [5, Th. 5.1] ist zwar für das Beweisbarkeitsproblem formuliert, aber wie der Autor auch selbst angibt, führt er den Beweis eigentlich für das Erfüllbarkeitsproblem. Die Aussage für das Beweisbarkeitsproblem folgt unter der Voraussetzung der Korrektheit und Vollständigkeit der betrachteten Systeme und wegen der Beziehung PSPACE = coPSPACE.

P. Blackburn, M. de Rijke und Y. Venema verallgemeinern das Ergebnis von Ladner wie folgt:

Satz 2.17 (Satz von Ladner) ([1, Th. 6.50])
Jede normale modale Logik Λ mit **K** $\subseteq \Lambda \subseteq$ **S4** *hat ein PSPACE-vollständiges Erfüllbarkeitsproblem.*

Zum Beweis der Zugehörigkeit zu PSPACE wird dort ein Algorithmus namens „Witness“ angegeben. Die PSPACE-Härte wird mittels einer Polynomialzeitreduktion auf das bekannte Problem QBF gezeigt, welches PSPACE-hart ist und wie folgt definiert ist:

Die Menge QBF besteht aus prädikatenlogischen Ausdrücken der Form

$$\mathsf{Q}_{p_1}^{(1)}\mathsf{Q}_{p_2}^{(2)}\ldots\mathsf{Q}_{p_n}^{(n)}\alpha(p_1,\,\ldots,\,p_n),$$

wobei $\alpha(p_1,\,\ldots,\,p_n)$ eine aussagenlogische Formel und $\mathsf{Q}_{p_1}^{(1)}\mathsf{Q}_{p_2}^{(2)}\ldots\mathsf{Q}_{p_n}^{(n)}$ ein Wort aus alternierenden Quantoren ist. Die Zugehörigkeit solcher Ausdrücke zu QBF wird induktiv erklärt:

- $\bigvee_{p_1}\alpha(p_1)\in$ QBF genau dann, wenn α erfüllbar ist.
- $\bigwedge_{p_1}\alpha(p_1)\in$ QBF genau dann, wenn α eine Tautologie ist.
- $\bigvee_{p_1}\mathsf{Q}_{p_2}^{(2)}\ldots\mathsf{Q}_{p_n}^{(n)}\alpha(p_1,\,\ldots,\,p_n)\in$ QBF genau dann, wenn *einer* der Ausdrücke $\mathsf{Q}_{p_2}^{(2)}\ldots\mathsf{Q}_{p_n}^{(n)}\alpha(\bot,\,p_2,\,\ldots,\,p_n)$ und $\mathsf{Q}_{p_2}^{(2)}\ldots\mathsf{Q}_{p_n}^{(n)}\alpha(\top,\,p_2,\,\ldots,\,p_n)$ in QBF liegt.
- $\bigwedge_{p_1}\mathsf{Q}_{p_2}^{(2)}\ldots\mathsf{Q}_{p_n}^{(n)}\alpha(p_1,\,\ldots,\,p_n)\in$ QBF genau dann, wenn *jeder* der Ausdrücke $\mathsf{Q}_{p_2}^{(2)}\ldots\mathsf{Q}_{p_n}^{(n)}\alpha(\bot,\,p_2,\,\ldots,\,p_n)$ und $\mathsf{Q}_{p_2}^{(2)}\ldots\mathsf{Q}_{p_n}^{(n)}\alpha(\top,\,p_2,\,\ldots,\,p_n)$ in QBF liegt.

Laut [1] lassen sich die angegebenen PSPACE-Algorithmen auf die temporalen und multimodalen Entsprechungen der Systeme **K**, **T**, **K4** und **S4** übertragen. Folglich liegen diese Systeme ebenfalls in PSPACE. Da ihre Erfüllbarkeitsprobleme aber die unimodalen als Spezialfall enthalten, folgt die PSPACE-Vollständigkeit aller dieser Logiken.

Die PSPACE-Vollständigkeit der multimodalen Systeme $\mathbf{K_n}$, $\mathbf{T_n}$ und $\mathbf{S4_n}$ wird ebenfalls von J. Y. Halpern und Y. Moses in [3] gezeigt. Dort wird sogar bewiesen, dass die (streng) multimodalen Systeme $\mathbf{S5_n}$ und $\mathbf{D4E_n}$ ($n\geq 2$) PSPACE-vollständige Erfüllbarkeitsprobleme besitzen.

2.3 Ausblicke

Zusammenfassung. In den vorangehenden beiden Abschnitten wurden Komplexitätsresultate für die folgenden Systeme zusammengetragen:

- NP-vollständig sind
  $\mathbf{K_t4.3}$, **K4E**, **K4B**, **D4E**, $\Lambda\supseteq$ **S4.3**, $\mathbf{K_nAlt_1}$, $\mathbf{T_c}$, **Triv**, **Ver**,
- PSPACE-vollständig sind
  K, …, **S4**, $\mathbf{K_n}$, $\mathbf{T_n}$, $\mathbf{K4_n}$, $\mathbf{S4_n}$, $\mathbf{K_t}$, $\mathbf{T_t}$, $\mathbf{K4_t}$, $\mathbf{S4_t}$, $\mathbf{D4E_m}$, $\mathbf{S5_m}$ ($m\geq 2$).

Markiert man nun in der im Anhang B aufgestellten Hierarchie modaler Systeme die bereits untersuchten, so erhält man die in Abbildung 2.2 wiedergegebene Übersicht.

Dabei wurden die Systeme $\mathbf{KAlt_n}$, $n\geq 2$, ebenfalls als PSPACE-vollständig markiert, da eine Folgerung aus dem Satz von Ladner, die in einer Entwurfsfassung von [1, Kap. 6] auftritt, dieses Resultat vermuten lässt. Diese Folgerung erscheint aber nicht in der Druckversion von [1], weshalb diesem Ergebnis kritisch begegnet werden sollte.

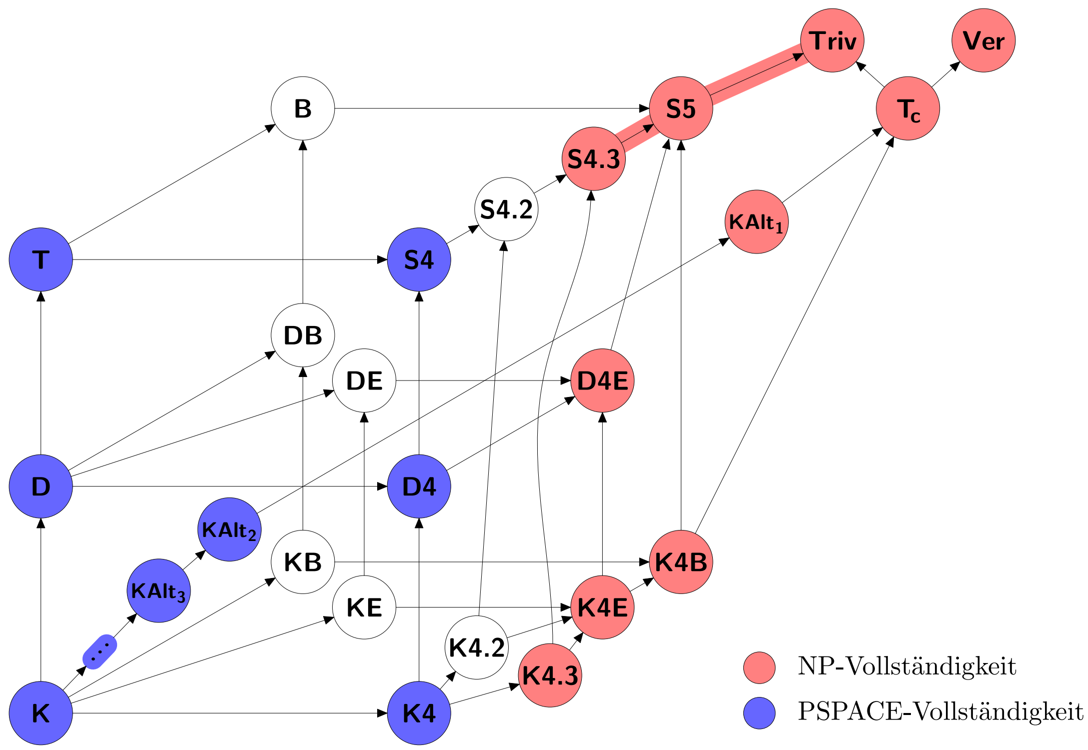

Abbildung 2.2: Hierarchie modaler Logiken mit Komplexitätsresultaten.

Offene Fragen. Wenn man die in dieser Arbeit vorgenommenen Betrachtungen weiterführen möchte, dann ist es zunächst von Interesse herauszufinden, welche Komplexität die in Abbildung 2.2 noch nicht gefärbten Systeme haben.

So ist es durchaus möglich, dass die Logiken **K4.2** und **S4.2** noch NP-vollständig sind. Wenn dies der Fall ist, dann ist zu vermuten, dass ein entsprechender Beweis nicht ohne die endliche Modelleigenschaft dieser Systeme auskommt. Es besteht sogar die Hoffnung, dass der Beweis für die NP-Vollständigkeit von $\mathbf{K_t4.3}$ aus Abschnitt 2.1.2 in ähnlicher Form auf die Logik **K4.2** übertragbar ist, da eine gewisse Ähnlichkeit zwischen den semantischen Eigenschaften besteht, die mit den Axiomen .2 und .3 korrespondieren.

Um dieser Idee nachgehen zu können, muss aber zunächst die endliche Modelleigenschaft von **K4.2** (und ggf. auch von **S4.2**) gezeigt werden. Dies erfordert eine tiefere Einarbeitung in die Theorie der endlichen Modelle. Um die endliche Modelleigenschaft von bestimmten Systemen zu zeigen, gibt es zwei grundlegende Ansätze: Zum einen kann man die Idee der kanonischen Modelle weiter verfolgen, deren Grundlagen im Anhang A vorgestellt werden. Dies ist jedoch noch keine Garantie für das Gelingen eines Beweises, denn für jedes System ist ein ganz bestimmter konstruktiver Beweisschritt nötig, der nicht unbedingt immer gefunden werden kann. Der zweite Ansatz besteht darin, aus einem erfüllenden Modell mittels so genannter Filtrationen ein endliches erfüllendes Modell zu konstruieren. Jede dieser beiden Herangehensweisen allein wäre schon ausgiebig genug für eine Diplomarbeit!

Des Weiteren besteht die Vermutung, dass die noch ausstehenden Systeme **KB**, **KE**, **DB**, **DE**, **B** (sowie $\mathbf{KAlt_n}$, $n \geq 2$) PSPACE-vollständig sind. Um dies zu untersuchen, ist eine genaue Einarbeitung in die Theorie, die dem Satz von LADNER zugrunde liegt, erforderlich. Wahrscheinlich ist es nicht allzu schwierig, den im Abschnitt 2.2 erwähnten Algorithmus „Witness“ auf diese Systeme (und womöglich auf *alle* normalen modalen Systeme) zu übertragen, um deren Zugehörigkeit zu PSPACE zu zeigen. Ob jedoch ein Beweis für die PSPACE-Härte dieser Systeme leicht zu finden ist, ist nach dem Stand dieser Arbeit nicht zu beurteilen.

Weiterführende Fragen. Es ist ebenfalls von Interesse, wie sich weitere normale Systeme, die in dieser Arbeit nicht betrachtet werden, in die aufgestellte Hierarchie einordnen und bezüglich ihrer Komplexität verhalten. Besonders interessant sind dabei Fragestellungen wie die folgenden:

- Welche weiteren normalen Systeme sind NP-vollständig?
- Gibt es für Klassen der Polynomialzeithierarchie vollständige Systeme?

Außerdem lässt Abbildung 2.2 vermuten, dass ein Zusammenhang zwischen dem Platz eines Systems in der Hierarchie und dessen Komplexität besteht: Es fällt auf, dass das Erfüllbarkeitsproblem der „höheren“ Logiken (also derjenigen, die mehr Theoreme und damit weniger erfüllbare Formeln enthalten – letzteres unter der Voraussetzung der Korrektheit und Vollständigkeit) leichter zu entscheiden ist als das der „niedrigeren“. Diese Auffälligkeit gibt Anlass zur Vermutung, dass es für zwei Systeme Λ_1 und Λ_2 mit $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$ einen direkten Zusammenhang zwischen deren Komplexität, beispielsweise Λ_2-SAT $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}}$ Λ_1-SAT, gibt.

Leider blieben Versuche, im Rahmen dieser Arbeit eine solche Beziehung zu beweisen, erfolglos. Ein Ansatz und die Gründe für sein Scheitern seien hier umrissen:

Für die normalen Systeme Λ_1 und Λ_2 sei angenommen, dass es ein Axiom A gibt mit $\Lambda_2 = \Lambda_1 + A$. Außerdem gelte $\mathsf{4} \in \Lambda_1$, und beide Systeme seien korrekt und vollständig bezüglich der ihrer Axiomatisierung entsprechenden Klassen von Rahmen.

Die Idee ist nun, für eine m-Reduzierung von Λ_2-SAT auf Λ_1-SAT die Funktion $f : \mathrm{Fma}(\Phi) \to \mathrm{Fma}(\Phi)$ mit $f(\varphi) = \varphi \wedge A \wedge \Box A$ zu verwenden. Während die Richtung „$\Rightarrow$“ der zu zeigenden Äquivalenz $\varphi \in \Lambda_2$-SAT $\Leftrightarrow f(\varphi) \in \Lambda_1$-SAT einfach nachzuprüfen ist, scheitert die Richtung „$\Leftarrow$“ an einer entscheidenden Stelle: Wenn $f(\varphi)$ in einem Λ_1-Modell erfüllt ist, so kann man zu demjenigen Teilmodell $\mathcal{M}$ dieses Modells übergehen, das durch die $f(\varphi)$ erfüllende Welt w_0 erzeugt wird. Neben der Tatsache, dass dieses Modell ebenfalls eines für Λ_1 ist und $f(\varphi)$ in w_0 erfüllt, kann man feststellen, dass $\mathcal{M}$ dann auch φ, A und $\Box A$ in w_0 erfüllt. Da $\mathcal{M}$ aber punktgeneriert und wegen $\mathsf{4}$ transitiv ist, ist damit A in allen Welten von $\mathcal{M}$ wahr. Daraus kann man aber nicht schließen, dass $\mathcal{M}$ ein Λ_2-Modell ist (was den Beweis vollenden würde), denn dazu müsste A in dem *Rahmen* $\mathcal{F}$ wahr sein, auf dem $\mathcal{M}$ basiert. Dass aber $\mathcal{M} \models A$ nicht $\mathcal{F} \models A$ impliziert, kann man für viele Axiome A anhand einfacher Gegenbeispiele erkennen.

Sollte es trotzdem möglich sein, unter bestimmten Anforderungen an Λ_1 und Λ_2 eine solche Reduzierbarkeit zu beweisen, so würde dies in manchen Fällen eine Übertragbarkeit bereits gewonnener Resultate auf andere Systeme sichern. So könnte man etwa aus dem Satz 2.12 über die NP-Vollständigkeit von $\mathbf{K_t4.3}$ sofort auf die NP-Vollständigkeit aller darüberliegenden normalen Systeme schließen. Auch der Algorithmus „Witness“, der zum Beweis der Zugehörigkeit von $\mathbf{K}$ zu PSPACE dient, braucht nicht für andere normale Systeme modifiziert zu werden, da deren Zugehörigkeit zu PSPACE dann aus der Reduzierbarkeitseigenschaft folgen würde. Es ist also durchaus erstrebenswert, eine Reduzierbarkeit zwischen zwei in Inklusion stehenden Systemen zu zeigen, die man (möglichst ohne weitere Anforderungen) aus den Axiomen erhält, durch die sich die beiden Systeme unterscheiden.

Erweiterung des Blickfeldes. Diese Arbeit beschränkt sich – abgesehen von wenigen Ausnahmen – auf normale unimodale Systeme. Es ist aber auch interessant, die Komplexität nichtnormaler Logiken sowie temporaler oder multimodaler Systeme zu untersuchen.

Auf dem Gebiet der nichtnormalen Logiken sind bisher kaum Komplexitätsresultate bekannt, während für die beiden zuletzt genannten Klassen schon viele Ergebnisse vorliegen. Diese sind aber bei Weitem noch nicht erschöpfend, denn gerade temporale und multimodale Logik besitzen ein breites Spektrum an Erweiterungsmöglichkeiten der Grundsprache (wie Operatoren für „Allgemeinwissen“, „verteiltes Wissen“, „since“, „until“, „next time“ und viele weitere), deren Hinzunahme die Komplexität eines Systems mehr oder weniger stark verändert. Darüber hinaus kann man zu noch aussagekräftigeren Erweiterungen multimodaler Logik wie beispielsweise dynamischer Logik übergehen und damit in Komplexitätsklassen wie EXPTIME vordringen.

Anhang A
Vollständigkeit modaler Systeme

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass jedes der in dieser Arbeit verwendeten modalen Systeme vollständig bezüglich der Klasse von Rahmen ist, die im Sinne der Korrespondenztheorie seinen Axiomen entspricht. Die Theorie, die benötigt wird, um die Vollständigkeit zu zeigen, ist allgemein bekannt ([1, Kap. 4], [4, Kap. 6], [6]) und wird im ersten Abschnitt wiedergegeben.

Im zweiten Abschnitt werden alle Systeme auf die Vollständigkeit hin untersucht. Dafür findet sich in der Literatur kaum eine zusammenhängende Darstellung, da die Vollständigkeit zumeist nur für einige klassische Systeme (**K**, **T**, **S4**, **S5**) gezeigt wird.

A.1 Kanonische Modelle und Vollständigkeit von K

Nach Definition 1.8 ist ein modales System Λ genau dann vollständig bezüglich einer Klasse $\mathfrak{F}$ von Rahmen, wenn jede Formel, die in allen Rahmen aus $\mathfrak{F}$ wahr ist, ein Theorem von Λ ist. Dies ist äquivalent zur Aussage: „Für jede Formel φ, die kein Theorem von Λ ist, gibt es einen Rahmen aus $\mathfrak{F}$, in dem φ nicht wahr ist.“ Das heißt, es gibt ein Modell, das auf einem Rahmen aus $\mathfrak{F}$ basiert und in dem $\neg\varphi$ in einer Welt wahr ist. Um ein solches Modell zu finden, bedient man sich der kanonischen Modelle, die aus maximalen konsistenten Mengen von Formeln gebildet werden.

Definition A.1 *Seien Γ eine Menge von Formeln und Λ ein modales System.*

*(1) Γ heißt **Λ-inkonsistent** genau dann, wenn es Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$ gibt, aus denen man einen Widerspruch der Form $\vdash_\Lambda \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$ beweisen kann.*
*Anderenfalls heißt Γ **Λ-konsistent**.*

*(2) Γ heißt **maximal Λ-konsistent** genau dann, wenn Γ Λ-konsistent und jede Formelmenge, in der Γ echt enthalten ist, Λ-inkonsistent ist.*
*Eine maximale Λ-konsistente Menge sei als **Λ-MKM** bezeichnet.*

Es folgen einige wichtige Eigenschaften von MKM.

Lemma A.2 ([1, Prop. 4.16]) *Seien Λ ein normales modales System, Γ eine Λ-MKM sowie φ, ψ beliebige Formeln. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) Es ist genau eine der Formeln φ, $\neg\varphi$ in Γ.
(2) $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ genau dann, wenn $\varphi \in \Gamma$ oder $\psi \in \Gamma$.
(3) $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ genau dann, wenn $\varphi \in \Gamma$ und $\psi \in \Gamma$.
(4) Wenn $\varphi \in \Gamma$ und $\varphi \to \psi \in \Gamma$, dann $\psi \in \Gamma$.
(5) $\Lambda \subseteq \Gamma$.

Beweis.

(1) Angenommen, φ und $\neg\varphi$ seien beide in Γ. Da aber die Formel $\neg(\varphi \land \neg\varphi)$ aus einer aussagenlogische Tautologie beweisbar ist, ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass Γ Λ-konsistent ist. Folglich ist *höchstens* eine der Formeln φ, $\neg\varphi$ in Γ.

Angenommen, keine der Formeln φ und $\neg\varphi$ sei in Γ. Dann ist jede der Mengen $\Gamma \cup \{\varphi\}$ und $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ Λ-inkonsistent. Folglich existieren $\psi_1, \ldots, \psi_m$ und $\psi_{m+1}, \ldots, \psi_n$ aus Γ mit

$$\vdash_\Lambda \neg(\psi_1 \land \ldots \land \psi_m \land \varphi) \qquad \text{und} \qquad \vdash_\Lambda \neg(\psi_{m+1} \land \ldots \land \psi_n \land \neg\varphi),$$

also

$$\vdash_\Lambda (\psi_1 \land \ldots \land \psi_m) \to \neg\varphi \qquad \text{und} \qquad \vdash_\Lambda (\psi_{m+1} \land \ldots \land \psi_n) \to \varphi.$$

Mit Hilfe geeigneter aussagenlogischer Tautologien folgt daraus

$$\vdash_\Lambda (\psi_1 \land \ldots \land \psi_n) \to \neg\varphi \qquad \text{und} \qquad \vdash_\Lambda (\psi_1 \land \ldots \land \psi_n) \to \varphi,$$

und daraus kann man $\vdash_\Lambda (\psi_1 \land \ldots \land \psi_n) \to \varphi \land \neg\varphi$ schließen. Da die rechte Seite dieser Implikation eine falsche Aussage ist, muss auch $\vdash_\Lambda \neg(\psi_1 \land \ldots \land \psi_n)$ gelten, was einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass Γ Λ-konsistent ist, darstellt.

Folglich ist genau eine der Formeln φ, $\neg\varphi$ in Γ.

(2) Zunächst sei angenommen, $\varphi \lor \psi \in \Gamma$, aber weder φ noch ψ sei in Γ. Dann wären wegen Punkt (1) sowohl $\neg\varphi$ als auch $\neg\psi$ in Γ. Wegen der aussagenlogischen Tautologie $\neg((p \lor q) \land \neg p \land \neg q)$ gilt aber $\vdash_\Lambda \neg((\varphi \lor \psi) \land \neg\varphi \land \neg\psi)$, was im Widerspruch dazu steht, dass Γ Λ-konsistent ist.

Sei nun angenommen, eine der Formeln φ, ψ sei in Γ (o. B. d. A. sei das φ), aber $\varphi \lor \psi \notin \Gamma$. Dann wäre wieder wegen (1) $\neg(\varphi \lor \psi)$ in Γ, und das würde wegen der aussagenlogischen Tautologie $\neg(p \land \neg(p \lor q))$ die Λ-Inkonsistenz von Γ bedeuten.

(3) Hier argumentiert man analog zum vorhergehenden Punkt, wobei man die Dualität der Operatoren $\lor$ und $\land$ benutzt.

(4) Angenommen, φ und $\varphi \to \psi$ seien in Γ, aber nicht ψ. Dann wäre $\neg\psi$ in Γ, was wegen der aussagenlogischen Tautologie $\neg(p \land (p \to q) \land \neg q)$ die Λ-Inkonsistenz von Γ bedeutete.

(5) Da jede Formel $\varphi \in \Lambda$ beweisbar ist, ist jede Menge, die $\neg\varphi$ enthält, Λ-inkonsistent. Folglich enthält keine Λ-konsistente Menge solch ein $\neg\varphi$, und jede Λ-MKM muss deshalb alle $\varphi \in \Lambda$ enthalten.

□

Das folgende Lemma besagt, dass jede konsistente Menge zu einer MKM erweitert werden kann.

Lemma A.3 (Lemma von Lindenbaum) ([1, Lemma 4.17])
Für jede Λ-konsistente Menge Γ existiert eine Λ-MKM Δ mit $\Gamma \subseteq \Delta$.

Beweis. Sei $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine Nummerierung der Formeln aus Fma(Φ). Dann sei Δ als Vereinigung einer aufsteigenden Kette von Λ-konsistenten Mengen definiert:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \Gamma, \\
\Delta_{n+1} &= \begin{cases} \Delta_n \cup \{\varphi_n\}, & \text{falls diese Menge } \Lambda\text{-konsistent ist} \\ \Delta_n \cup \{\neg\varphi_n\}, & \text{sonst} \end{cases} \\
\Delta &= \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n .
\end{aligned}$$

Per Induktion über n kann man nun zeigen, dass alle Δ_n Λ-konsistent sind: Der Induktionsanfang folgt aus der Voraussetzung, dass Γ Λ-konsistent ist. Für den Induktionsschritt nehme man an, dass Δ_{n+1} Λ-inkonsistent sei. Nach Konstruktion von Δ_{n+1} bedeutet dies, dass sowohl $\Delta_n \cup \{\varphi_n\}$ als auch $\Delta_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ Λ-inkonsistent sind. Wie in Punkt (1) des vorangehenden Beweises folgt daraus aber die Λ-Inkonsistenz von Δ_n.

Aus der Λ-Konsistenz aller Δ_n folgt nun auch die Λ-Konsistenz von Δ. Denn wäre Δ Λ-inkonsistent, dann existierten Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_n$ aus Δ, aus denen man einen Widerspruch ableiten könnte. Nach Konstruktion gäbe es dann aber ein Δ_n, in dem alle diese Formeln lägen, und das ist wegen der Λ-Konsistenz der Δ_n nicht möglich.

Um zu zeigen, dass Δ auch *maximal* Λ-konsistent ist, mache man sich klar, dass nach Konstruktion der Δ_n für jede Formel φ entweder φ oder $\neg\varphi$ in Δ ist. Betrachtet man nun eine beliebige Menge Δ', in der Δ echt enthalten ist, so gibt es eine Formel $\varphi \in \Delta' \setminus \Delta$. Wegen $\varphi \notin \Delta$ ist $\neg\varphi \in \Delta$, also ist Δ' wegen $\varphi, \neg\varphi \in \Delta'$ Λ-inkonsistent. $\square$

Die MKM bilden nun die Welten des zu konstruierenden kanonischen Modells.

Definition A.4 *Sei Λ eine normale modale Logik. Das* ***kanonische Modell*** $\mathcal{M}^\Lambda = (W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$ *ist definiert durch:*

- $W^\Lambda = \{\Delta : \Delta$ *ist* Λ*-MKM*$\}$.
- $\Gamma R^\Lambda \Delta$ *genau dann, wenn für alle* φ *gilt: Wenn* $\varphi \in \Delta$*, dann* $\Diamond\varphi \in \Gamma$.
  R^Λ *heißt die* ***kanonische Relation****.*
- $V^\Lambda(p) = \{\Delta \in W^\Lambda : p \in \Delta\}$, *für alle* $p \in \Phi$.
  V^Λ *heißt die* ***kanonische Belegungsfunktion****.*

Nach dieser Definition gilt für alle atomaren Aussagen p und alle Welten Δ des kanonischen Modells die Beziehung

$$\mathcal{M}^\Lambda, \Delta \models p \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad p \in \Delta.$$

Mit Hilfe des Wahrheitslemmas wird es später möglich sein, diese Beziehung für *alle* Formeln zu beweisen.

Nun zeichnet sich ab, dass $\mathcal{M}^\Lambda$ eine Art „universelles Modell" für Λ ist: Da W^Λ aus allen Λ-MKM besteht, ist jede Λ-konsistente Menge in einer Welt Δ von $\mathcal{M}^\Lambda$ enthalten und – aufgrund des Wahrheitslemmas – auch in Δ *wahr*.

Die folgenden Aussagen führen schrittweise zum Wahrheitslemma.

Lemma A.5 ([1, Lemma 4.19]) *Für jedes normale modale System Λ und alle Λ-MKM Γ, Δ gilt $\Gamma R^\Lambda \Delta$ genau dann, wenn alle Formeln φ die Implikation*

$$\Box\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Delta$$

erfüllen.

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Gelte $\Gamma R^\Lambda \Delta$. Um die Kontraposition der Implikation zu zeigen, sei $\varphi \notin \Delta$ angenommen. Dann muss nach Lemma A.2 $\neg\varphi$ in Δ sein. Wegen $\Gamma R^\Lambda \Delta$ folgt daraus $\Diamond\neg\varphi \in \Gamma$. Wegen der Konsistenz von Γ kann $\neg\Diamond\neg\varphi$ nicht in Γ liegen, also $\Box\varphi \notin \Gamma$.

„$\Leftarrow$“: Gelte $\Box\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Delta$ für alle Formeln φ. Um $\Gamma R^\Lambda \Delta$ zu zeigen, wird die Kontraposition der Implikation $\varphi \in \Delta \Rightarrow \Diamond\varphi \in \Gamma$ gezeigt.

Sei also $\Diamond\varphi$ nicht in Γ. Nach Lemma A.2 liegt das Axiom Dual und damit auch die Implikation $\neg\Box\neg\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ in Γ. Wiederum nach Lemma A.2 folgt nun $\neg\Box\neg\varphi \notin \Gamma$, also muss $\Box\neg\varphi$ in Γ sein. Nach Voraussetzung folgt $\neg\varphi \in \Delta$, also $\varphi \notin \Delta$.

$\Box$

Lemma A.6 (Existenzlemma) ([1, Lemma 4.20])
Für jede normale modale Logik Λ, jede Welt $\Gamma \in W^\Lambda$ und jede Formel φ gilt:
Wenn $\Diamond\varphi \in \Gamma$, dann existiert eine Welt $\Delta \in W^\Lambda$ mit $\Gamma R^\Lambda \Delta$ und $\varphi \in \Delta$.

Beweis. Seien Λ ein normales System, $\Gamma \in W^\Lambda$ und φ eine Formel mit $\Diamond\varphi \in \Gamma$. Dann wird Δ wie folgt konstruiert:

Sei $\Delta_0 = \{\varphi\} \cup \{\psi : \Box\psi \in \Gamma\}$. Zunächst wird angenommen, dass diese Menge Λ-inkonsistent ist. Dann gibt es Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_m$ aus Δ_0 mit $\vdash_\Lambda \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m)$. Ist nun φ nicht unter den $\psi_1, \ldots, \psi_m$, so kann man wegen Taut folgern, dass auch $\vdash_\Lambda \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m \wedge \varphi)$ gilt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man also davon ausgehen, dass es Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_n$ aus Δ_0 gibt mit $\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow \neg\varphi$. Dann ist aber auch die Implikation $\Box(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow \Box\neg\varphi$ in Λ beweisbar, und zwar mittels der Regel NR, des Axioms K und der Regel MP. Nun ist aber die Formel $(\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n) \rightarrow \Box(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$ ein Theorem jeder normalen modalen Logik (sie ist ebenfalls aus K ableitbar). Folglich ist auch die Implikation $(\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n) \rightarrow \Box\neg\varphi$ in Λ beweisbar. Da aber die Formeln $\Box\psi_1, \ldots, \Box\psi_n$ aus der Λ-MKM Γ sind, folgt nach Lemma A.2, dass auch deren Konjunktion und damit $\Box\neg\varphi$ in Γ ist. Folglich ist $\neg\Box\neg\varphi \notin \Gamma$, also mit Dual $\Diamond\varphi \notin \Gamma$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Da Δ_0 also Λ-konsistent ist, existiert nach dem Lemma von Lindenbaum eine Λ-MKM, die Δ_0 enthält. Sei Δ eine solche Λ-MKM. Nach Konstruktion ist sofort $\varphi \in \Delta$, und es gilt für alle Formeln ψ: wenn $\Box\psi \in \Gamma$, dann $\psi \in \Delta_0$, also auch $\psi \in \Delta$. Folglich gilt $\Gamma R^\Lambda \Delta$ nach Lemma A.5. $\Box$

Lemma A.7 (Wahrheitslemma) ([1, Lemma 4.21])
Für jede normale modale Logik Λ, jede Welt $\Gamma \in W^\Lambda$ und jede Formel φ gilt:

$$\mathcal{M}^\Lambda, \Gamma \models \varphi \qquad \textit{genau dann, wenn} \qquad \varphi \in \Gamma.$$

Beweis. Per Induktion über den Aufbau von φ. Der Induktionsanfang folgt direkt aus der Definition der kanonischen Belegungsfunktion. Die Fälle $\varphi = \neg\psi$ und $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ lassen sich ganz einfach mit Hilfe von Lemma A.2 behandeln. Der Fall $\varphi = \Diamond\psi$ wird wie folgt bewiesen:

„$\Rightarrow$“: $\mathcal{M}^\Lambda, \Gamma \models \Diamond\psi$ bedeutet, dass es ein $\Delta \in W^\Lambda$ mit $\Gamma R^\Lambda \Delta$ und $\mathcal{M}^\Lambda, \Delta \models \psi$ gibt. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann auch $\psi \in \Delta$, und wegen $\Gamma R^\Lambda \Delta$ folgt $\Diamond\psi \in \Gamma$.

„$\Leftarrow$“: Wenn $\Diamond\psi \in \Gamma$, dann gibt es wegen des Existenzlemmas ein $\Delta \in W^\Lambda$ mit $\Gamma R^\Lambda \Delta$ und $\psi \in \Delta$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann auch $\mathcal{M}^\Lambda, \Delta \models \psi$, also $\mathcal{M}^\Lambda, \Gamma \models \Diamond\psi$. □

Mit Hilfe der Theorie über kanonische Modelle lässt sich nun die Vollständigkeit von K zeigen:

Satz A.8 K *ist vollständig bezüglich der Klasse aller Rahmen.*

Beweis. Um zu beweisen, dass jede Formel, die in jedem Rahmen wahr ist, auch ein Theorem von K ist, wird gezeigt: wenn $\nvdash_{\mathsf{K}} \varphi$, dann $\not\models \varphi$.

Gelte also $\nvdash_{\mathsf{K}} \varphi$. Dann ist $\{\neg\varphi\}$ K-konsistent, und es existiert nach dem Lemma von Lindenbaum eine K-MKM Γ mit $\neg\varphi \in \Gamma$. Wegen des Wahrheitslemmas gilt dann auch $\mathcal{M}^{\mathsf{K}}, \Gamma \models \neg\varphi$, also $\not\models \varphi$. □

A.2 Anwendung auf andere Systeme

Selbstverständlich folgt aus der Vollständigkeit von K nach Satz A.8 auch die Vollständigkeit aller anderen normalen modalen Logiken bezüglich der Klasse aller Rahmen. Doch um zu zeigen, dass ein System „über“ K durch eine gewisse Klasse von Rahmen *bestimmt* ist, muss die Vollständigkeit bezüglich einer Klasse von Rahmen gezeigt werden, bezüglich derer diese Logik korrekt ist. Da im Abschnitt 1.5 bereits die Korrektheit aller für diese Arbeit relevanten Systeme bezüglich gewisser Klassen von Rahmen gezeigt wurde, muss für die Vollständigkeit nur noch bewiesen werden, dass das kanonische Modell für die entsprechende Logik wieder in der zugehörigen Klasse von Rahmen liegt.

Satz A.9 *Gegeben sei eine normale modale Logik $\Lambda = \mathsf{K} + A_1 + \ldots + A_n$, wobei $A_1, \ldots, A_n$ Axiome aus $\{\mathsf{T}, \mathsf{D}, \mathsf{4}, \mathsf{B}, \mathsf{E}, .\mathsf{2}, .\mathsf{3}, \mathsf{Alt_n}, \mathsf{T_c}, \mathsf{Triv}, \mathsf{Ver}\}$ sind. Ferner sei P die Konjunktion aller Eigenschaften von Rahmen, die im Sinne der Korrespondenztheorie den Axiomen $A_1, \ldots, A_n$ entsprechen.*

Dann ist Λ vollständig bezüglich der Klasse aller Rahmen mit P.

Beweis. Für die Vollständigkeit aller dieser Systeme muss gezeigt werden: Wenn eine Logik Λ das Axiom A_i enthält, dann hat der Rahmen, auf dem das kanonische Modell für Λ basiert, diejenige Eigenschaft, die mit A_i korrespondiert. Daraus folgt, dass für $\Lambda = \mathsf{K} + A_1 + \ldots + A_n$ das kanonische Modell gerade die im Satz eingeführte Eigenschaft P hat, und der Beweis für die Vollständigkeit von Λ bezüglich der Klasse aller Rahmen mit P verläuft wie der Beweis von Satz A.8.

Es ist also für alle Axiome A und deren korrespondierende Eigenschaft P_A zu zeigen, dass für jede Logik Λ, die A enthält, das kanonische Modell auf einem Rahmen mit P_A basiert. Diese Überprüfung wird im Folgenden exemplarisch für die Axiome B, E, Alt_1 und T_c vorgenommen. Für die übrigen Axiome ist analog zu verfahren, wenngleich der Schwierigkeitsgrad der anzustellenden Überlegungen unterschiedlich ist.

B Sei Λ ein normales System mit B. Dann ist für jedes φ die Formel $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ ein Theorem von Λ und damit auch in jeder Λ-MKM enthalten. Folglich ist jede Formel $\varphi \to \neg\Diamond\neg\Diamond\varphi$ in jeder Welt des kanonischen Modells für Λ enthalten.

Um zu zeigen, dass dieses kanonische Modell auf einem symmetrischen Rahmen basiert, nehme man für beliebige $\Gamma_1, \Gamma_2 \in W^\Lambda$ an, dass $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_2$ gilt. Um $\Gamma_2 R^\Lambda \Gamma_1$ zu zeigen, sei $\varphi \in \Gamma_1$ angenommen. Wegen der Vorbetrachtungen folgt daraus $\neg\Diamond\neg\Diamond\varphi \in \Gamma_1$. Wäre nun $\Diamond\varphi$ nicht in Γ_2, so wäre $\neg\Diamond\varphi$ in Γ_2. Das bedeutet aber wegen $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_2$, dass $\Diamond\neg\Diamond\varphi \in \Gamma_1$ gelten würde, was im Widerspruch zu $\neg\Diamond\neg\Diamond\varphi \in \Gamma_1$ steht. Folglich ist $\Diamond\varphi \in \Gamma_2$.

Da damit für beliebige Formeln φ die Beziehung „wenn $\varphi \in \Gamma_1$, dann $\Diamond\varphi \in \Gamma_2$" gezeigt wurde, folgt $\Gamma_2 R^\Lambda \Gamma_1$. Folglich basiert das kanonische Modell für Λ auf einem symmetrischen Rahmen.

E Sei Λ ein normales System mit E. Dann ist für jedes φ die Formel $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ ein Theorem von Λ und damit auch in jeder Λ-MKM enthalten. Folglich ist jede Formel $\Diamond\varphi \to \neg\Diamond\neg\Diamond\varphi$ in jeder Welt des kanonischen Modells für Λ enthalten.

Um zu zeigen, dass dieses kanonische Modell auf einem euklidischen Rahmen basiert, nehme man für beliebige $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in W^\Lambda$ an, dass $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_2$ und $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_3$ gilt. Um $\Gamma_2 R^\Lambda \Gamma_3$ zu zeigen, sei $\varphi \in \Gamma_3$ angenommen. Wegen $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_3$ folgt daraus $\Diamond\varphi \in \Gamma_1$, was wiederum wegen der Vorbetrachtungen $\neg\Diamond\neg\Diamond\varphi \in \Gamma_1$ impliziert. Wäre nun $\Diamond\varphi$ nicht in Γ_2, so wäre $\neg\Diamond\varphi$ in Γ_2. Das bedeutet aber wegen $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_2$, dass $\Diamond\neg\Diamond\varphi \in \Gamma_1$ gelten würde, was im Widerspruch zu $\neg\Diamond\neg\Diamond\varphi \in \Gamma_1$ steht. Folglich ist $\Diamond\varphi \in \Gamma_2$.

Da damit für beliebige Formeln φ die Beziehung „wenn $\varphi \in \Gamma_3$, dann $\Diamond\varphi \in \Gamma_2$" gezeigt wurde, folgt $\Gamma_2 R^\Lambda \Gamma_3$. Folglich basiert das kanonische Modell für Λ auf einem euklidischen Rahmen.

Alt_1 Sei Λ ein normales System mit Alt_1. Dann ist für jedes φ die Formel $\Box\neg\varphi \vee \Box(\neg\varphi \to \varphi)$ (oder äquivalent $\neg\Diamond\varphi \vee \neg\Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\varphi)$) ein Theorem von Λ und damit auch in jeder Λ-MKM enthalten. Folglich ist jede Formel $\Diamond\varphi \to \neg\Diamond(\neg\varphi)$ in jeder Welt des kanonischen Modells für Λ enthalten.

Um zu zeigen, dass in diesem kanonischen Modell jede Welt höchstens einen R^Λ-Nachfolger hat, nehme man für beliebige $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in W^\Lambda$ an, dass $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_2$ und $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_3$ gilt. Um $\Gamma_2 = \Gamma_3$ zu zeigen, sei $\varphi \in \Gamma_2$ angenommen. Wegen $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_2$ folgt daraus $\Diamond\varphi \in \Gamma_1$, was wiederum wegen der Vorbetrachtungen $\neg\Diamond(\neg\varphi) \in \Gamma_1$ impliziert. Wegen $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_3$ folgt daraus $\neg\varphi \notin \Gamma_3$, also $\varphi \in \Gamma_3$.

Da somit für beliebige Formeln φ die Beziehung „wenn $\varphi \in \Gamma_2$, dann $\varphi \in \Gamma_3$" und analog dazu auch die Umkehrung gilt, folgt $\Gamma_2 = \Gamma_3$. Folglich hat im kanonischen Modell für Λ jede Welt höchstens einen R^Λ-Nachfolger.

$\mathsf{T_c}$ Sei Λ ein normales System mit $\mathsf{T_c}$. Dann ist für jedes φ die Formel $\Diamond\varphi \to \varphi$ ein Theorem von Λ und damit auch in jeder Λ-MKM enthalten. Folglich ist jede solche Formel in jeder Welt des kanonischen Modells für Λ enthalten.

Um zu zeigen, dass in diesem kanonischen Modell jede Welt höchstens mit sich selbst in Relation steht, nehme man für beliebige $\Gamma_1, \Gamma_2 \in W^\Lambda$ an, dass $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_2$ gilt. Um $\Gamma_1 = \Gamma_2$ zu zeigen, sei zunächst $\varphi \in \Gamma_2$ angenommen. Wegen $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_2$ folgt daraus $\Diamond\varphi \in \Gamma_1$, was wiederum wegen der Vorbetrachtungen $\varphi \in \Gamma_1$ impliziert. Nimmt man hingegen an, dass $\varphi \notin \Gamma_2$ gilt, so folgt daraus $\neg\varphi \in \Gamma_2$, also $\Diamond\neg\varphi \in \Gamma_1$ (wegen $\Gamma_1 R^\Lambda \Gamma_2$) und somit $\neg\varphi \in \Gamma_1$ (wegen der Vorbetrachtungen). Das impliziert $\varphi \notin \Gamma_1$.

Da somit für beliebige Formeln φ die Beziehung „$\varphi \in \Gamma_1$ genau dann, wenn $\varphi \in \Gamma_2$" gilt, folgt $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Folglich steht im kanonischen Modell für Λ jede Welt höchstens mit sich selbst in Relation.

$\square$

Anhang B
Beziehungen zwischen modalen Systemen

Dieses Kapitel erklärt alle in der Arbeit verwendeten modalen Systeme und die zwischen ihnen herrschenden Inklusionsbeziehungen. Dabei wird das Kriterium aus Lemma 1.9 benutzt, mit dessen Hilfe es möglich ist, Inklusionen und Nicht-Inklusionen auf semantischem Weg zu zeigen. Die Grundlage hierfür bilden die in den Abschnitten 1.5 und A.2 bewiesenen Resultate für die Korrektheit und Vollständigkeit der einzelnen Systeme bezüglich der Klasse aller Rahmen mit den Eigenschaften, die mit der jeweiligen Axiomatisierung korrespondieren.

B.1 Normale Systeme mit T, D, 4, B, E

Es ist zu erwarten, dass sich durch beliebige Kombinationen dieser fünf Axiome bis zu $2^5 = 32$ verschiedene normale Systeme (**K** eingeschlossen) bilden lassen. Da jedoch in jedem normalen System D mit Hilfe von T beweisbar ist (und entsprechend auf semantischer Ebene jede reflexive Relation total ist), können aus den genannten Axiomen nur höchstens $3 \cdot 2^3 = 24$ Logiken gebildet werden:

kein zusätzliches Axiom

K

1 Axiom

K4 = **K** + 4
KE = **K** + E
KB = **K** + B
D = **K** + D
T = **K** + T

2 Axiome

K4E = **K** + 4 + E
K4B = **K** + 4 + B
KBE = **K** + B + E
D4 = **K** + D + 4
DE = **K** + D + E
DB = **K** + D + B
S4 = **K** + T + 4
S5 = **K** + T + E
B = **K** + T + B

3 Axiome

D4E = **K** + D + 4 + E
D4B = **K** + D + 4 + B
DBE = **K** + D + B + E
S4E = **K** + T + 4 + E
S4B = **K** + T + 4 + B
SBE = **K** + T + B + E
K4BE = **K** + 4 + B + E

4 Axiome

D4BE = **D** + 4 + B + E
S4BE = **T** + 4 + B + E

Im Folgenden wird gezeigt, dass die in geneigter Schrift hervorgehobenen Systeme mit den übrigen zusammenfallen und dass genau die Inklusionsbeziehungen aus Abbildung B.1 gelten.

Zusammenfallende Systeme.

(1) Jede symmetrische, euklidische Relation ist transitiv:

Sei R symmetrisch und euklidisch, und seien u, v, w beliebig mit uRv, vRw. Dann folgt vRu wegen der Symmetrie von R. Aus vRu und vRw folgt nun wegen der Euklidizität von R, dass uRw gilt. Damit ist R transitiv.

Deshalb gelten die Beziehungen *KBE* $\supseteq$ *K4BE*, *DBE* $\supseteq$ *D4BE* und *SBE* $\supseteq$ *S4BE*. Da die umgekehrten Inklusionen wegen der Axiomatisierungen gelten, fällt jedes dieser drei Paare von Systemen zusammen.

(2) Jede transitive, symmetrische Relation ist euklidisch: Sei R transitiv und symmetrisch, und seien u, v, w beliebig mit uRv, uRw. Dann folgt vRu wegen der Symmetrie von R. Aus vRu und uRw folgt nun wegen der Transitivität von R, dass vRw gilt. Damit ist R euklidisch.

Deshalb gelten die Beziehungen **K4B** $\supseteq$ *K4BE*, *D4B* $\supseteq$ *D4BE* und *S4B* $\supseteq$ *S4BE*. Da die umgekehrten Inklusionen wegen der Axiomatisierungen gelten, fallen unter Berücksichtigung von (1) die folgenden Systeme zusammen: *KBE* und *K4BE* mit **K4B**, *DBE* und *D4BE* mit *D4B*, *SBE* und *S4BE* mit *S4B*.

(3) Jede reflexive, euklidische Relation ist symmetrisch: Sei R reflexiv und euklidisch, und seien u, v beliebig mit uRv. Dann folgt uRu, da R reflexiv ist. Aus uRv und uRu folgt nun wegen der Euklidizität von R, dass vRu gilt. Damit ist R symmetrisch.

Deshalb gelten die Beziehungen **S5** $\supseteq$ *SBE* und *S4E* $\supseteq$ *S4BE*. Da die umgekehrten Inklusionen wegen der Axiomatisierungen gelten, fallen unter Berücksichtigung der vorangehenden Punkte die Systeme *S4E*, *SBE* (und alle damit zusammenfallenden Logiken) mit **S5** zusammen.

(4) Jede transitive, symmetrische, totale Relation ist reflexiv und euklidisch: Sei R transitiv, symmetrisch und total. Dann ist R wegen (2) auch euklidisch. Sei nun w beliebig. Da R total ist, existiert ein v mit wRv. Wegen der Symmetrie von R folgt vRw, und aus diesen beiden Beziehungen folgt wegen der Transitivität wRw. Damit ist R reflexiv.

Deshalb gilt *D4B* $\supseteq$ **S5**. Außerdem ist jede reflexive, euklidische Relation total und wegen (3) und (1) auch symmetrisch und transitiv.

Deshalb fällt *D4B* mit **S5** zusammen, und man erhält die allgemein bekannte Eigenschaft von **S5**, dass dieses System durch Äquivalenzrelationen charakterisiert ist.

Inklusionen. Selbstverständlich wird hier und im nächsten Absatz die Transitivität der Inklusionsbeziehung genutzt, auch wenn darauf nicht immer explizit verwiesen wird.

(1) Wegen der Axiomatisierungen der einzelnen Systeme gelten die folgenden Inklusionen:

K $\subseteq$ **K4**, **KE**, **KB**, **D**	**D** $\subseteq$ **D4**, **DE**, **DB**, **T**	**D4** $\subseteq$ **D4E**, **S4**
K4 $\subseteq$ **K4E**, **K4B**, **D4**	**T** $\subseteq$ **S4**, **B**	**DE** $\subseteq$ **D4E**
KE $\subseteq$ **K4E**, **DE**	**K4E** $\subseteq$ **D4E**	**DB** $\subseteq$ **B**
KB $\subseteq$ **K4B**, **DB**		

(2) Wegen der Ausführungen in den Punkten (2), (3) und (4) gelten auch die folgenden Inklusionen:

KE, **K4E** $\subseteq$ **K4B**, **T**, **K4B**, **S4**, **B**, **D4E** $\subseteq$ **S5**

Diese Inklusionsbeziehungen rechtfertigen das Aufstellen einer Hierarchie, wie sie in Abbildung B.1 wiedergegeben ist. Dabei bedeutet ein Pfeil von System Λ_1 zu System Λ_2, dass $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$ gilt.

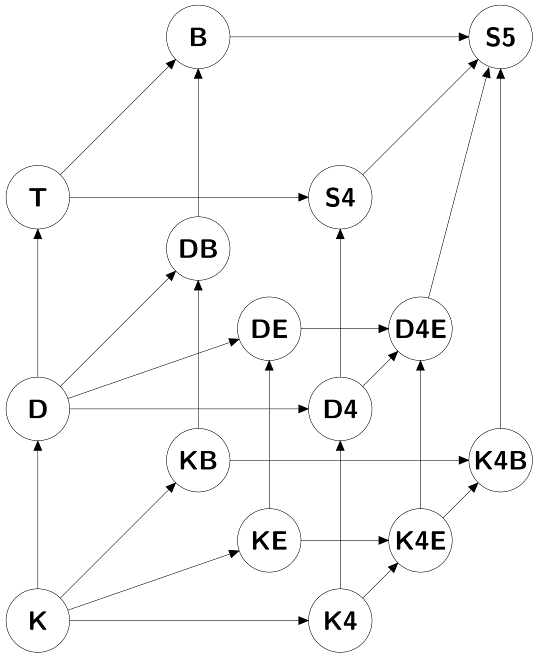

Abbildung B.1: Hierarchie modaler Logiken zwischen **K** und **S5**.

Keine Inklusionen. Nun bleibt noch zu klären, dass für alle Systeme Λ_1, Λ_2, für die in Abbildung B.1 kein Pfeil von Λ_1 zu Λ_2 führt, die Beziehung $\Lambda_1 \not\subseteq \Lambda_2$ gilt. Im Folgenden werden alle diese Nicht-Inklusionen systematisch gezeigt.

(1) Da es reflexive, symmetrische, nicht-transitive Relationen gibt (z. B. $R = \{(u, u), (u, v), (v, u), (v, v), (v, w), (w, v), (w, w)\}$ über $W = \{u, v, w\}$), gilt **B** $\not\supseteq$ **K4**. Daraus folgt, dass keine der Logiken **B**, **T**, **DB**, **D**, **KB**, **K** eines der Systeme **K4**, **D4**, **K4E**, **D4E**, **K4B**, **S4**, **S5** enthält.

(2) Da es reflexive, symmetrische, nicht-euklidische Relationen gibt (z. B. $R = \{(u, u), (u, v), (u, w), (v, u), (v, v), (w, u), (w, w)\}$ über $W = \{u, v, w\}$), gilt **B** $\not\supseteq$ **KE**. Daraus folgt, dass keine der Logiken **B**, **T**, **DB**, **D**, **KB**, **K** eines der Systeme **KE**, **DE** enthält.

(3) Da es reflexive, transitive Relationen gibt, die nicht euklidisch sind (z. B. $R = \{(u, u), (u, v), (u, w), (v, v), (w, w)\}$ über $W = \{u, v, w\}$), gilt **S4** $\not\supseteq$ **KE**. Daraus folgt, dass keine der Logiken **S4**, **D4**, **K4** eines der Systeme **KE**, **DE**, **K4E**, **D4E**, **K4B**, **S5** enthält.

(4) Da es reflexive, transitive Relationen gibt, die nicht symmetrisch sind (z. B. $R = \{(u, u), (u, v), (v, v)\}$ über $W = \{u, v\}$), gilt **S4** $\not\supseteq$ **KB**. Daraus folgt, dass keine der Logiken **S4**, **T**, **D**, **D4**, **K4**, **K** eines der Systeme **KB**, **DB**, **B** enthält.

(5) Da es totale, transitive, euklidische Relationen gibt, die nicht reflexiv sind (z. B. $R = \{(u, v), (v, v)\}$ über $W = \{u, v\}$), gilt **D4E** $\not\supseteq$ **T**. Daraus folgt, dass keine der Logiken **D4E**, **DE**, **D**, **KE**, **D4**, **K4E**, **K4**, **K** eines der Systeme **T**, **B**, **S4**, **S5** enthält.

(6) Da es totale, transitive, euklidische Relationen gibt, die nicht symmetrisch sind (z. B. $R = \{(u, v), (v, v)\}$ über $W = \{u, v\}$), gilt **D4E** $\not\supseteq$ **KB**. Daraus folgt,

dass keine der Logiken **D4E**, **DE**, **KE**, **K4E** eines der Systeme **KB**, **DB**, **K4B** enthält.

(7) Da es transitive, symmetrische Relationen gibt, die nicht total sind (z. B. die leere Relation über einer beliebigen Menge von Welten), gilt **K4B** $\not\supseteq$ **D**. Daraus folgt, dass keine der Logiken **K4B**, **K4E**, **KE**, **K4**, **KB**, **K** eines der Systeme **D**, **D4**, **DE**, **D4E**, **DB**, **B**, **T**, **S4**, **S5** enthält.

(8) Da es totale, symmetrische Relationen gibt, die nicht reflexiv sind (z. B. $R = \{(u, v), (v, u)\}$ über $W = \{u, v\}$), gilt **DB** $\not\supseteq$ **T**, woraus auch **DB** $\not\supseteq$ **B** folgt.

(9) Da es totale, euklidische Relationen gibt, die nicht transitiv sind (z. B. $R = \{(u, v), (v, v), (v, w), (w, v), (w, w)\}$ über $W = \{u, v, w\}$), gilt **DE** $\not\supseteq$ **K4**. Daraus folgt, dass keine der Logiken **DE**, **KE** eines der Systeme **K4**, **K4E**, **D4**, **D4E** enthält.

Damit sind alle Nicht-Inklusionen gezeigt (einige davon mehrfach). Abbildung B.1 gibt somit die Beziehungen zwischen den 15 Systemen exakt wieder.

B.2 Normale Systeme mit .2, .3

Hier werden folgende Systeme zueinander und zu den bisher betrachteten in Beziehung gesetzt:

K4.2	=	**K** + 4 + .2	**S4.2**	=	**K** + T + 4 + .2
K4.3	=	**K** + 4 + .3	**S4.3**	=	**K** + T + 4 + .3

Wie sich im Folgenden zeigen wird, fallen von diesen Systemen keine zwei zusammen. Es fällt auch keine dieser Logiken mit einem der bisher untersuchten Systeme zusammen.

Inklusionen.

(1) Aufgrund der Axiomatisierungen gelten folgende Inklusionsbeziehungen:

K4	$\subseteq$	**K4.2**, **K4.3**	**K4.2**	$\subseteq$	**S4.2**
S4	$\subseteq$	**S4.2**, **S4.3**	**K4.3**	$\subseteq$	**S4.3**

(2) Jede euklidische Relation hat keine Vorwärtsverzweigung:

Sei R euklidisch, und seien u, v, w beliebig mit uRv und uRw. Dann folgt wegen der Euklidizität von R, dass vRw gilt. Folglich gilt auch die schwächere Bedingung $vRw \vee v = w \vee wRv$. Damit hat R keine Vorwärtsverzweigung.

Somit gilt **K4.3** $\subseteq$ **K4E** sowie **S4.3** $\subseteq$ **S5**.

(3) Jede transitive, reflexive Relation ohne Vorwärtsverzweigung ist zusammenlaufend:

Sei R transitiv, reflexiv, ohne Vorwärtsverzweigung, und seien u, v, w beliebig mit uRv, uRw und $v \neq w$. Da R keine Vorwärtsverzweigung hat, folgt vRw oder wRv. Wegen der Reflexivität von R gilt also o. B. d. A. vRw und wRw. Damit nimmt w die Rolle der Variable x in der Formel für das Zusammenlaufen von R ein.

Somit gilt **S4.2** $\subseteq$ **S4.3**.

(4) Jede euklidische Relation ist zusammenlaufend:

Sei R euklidisch, und seien u, v, w beliebig mit uRv, uRw, $v \neq w$. Dann folgt wegen der Euklidizität von R auch vRv und wRv. Damit nimmt v die Rolle der Variable x in der Formel für das Zusammenlaufen von R ein.

Somit gilt **K4.2** $\subseteq$ **K4E**.

Diese Inklusionsbeziehungen rechtfertigen das Erweitern der bisherigen Hierarchie wie in Abbildung B.2 angegeben.

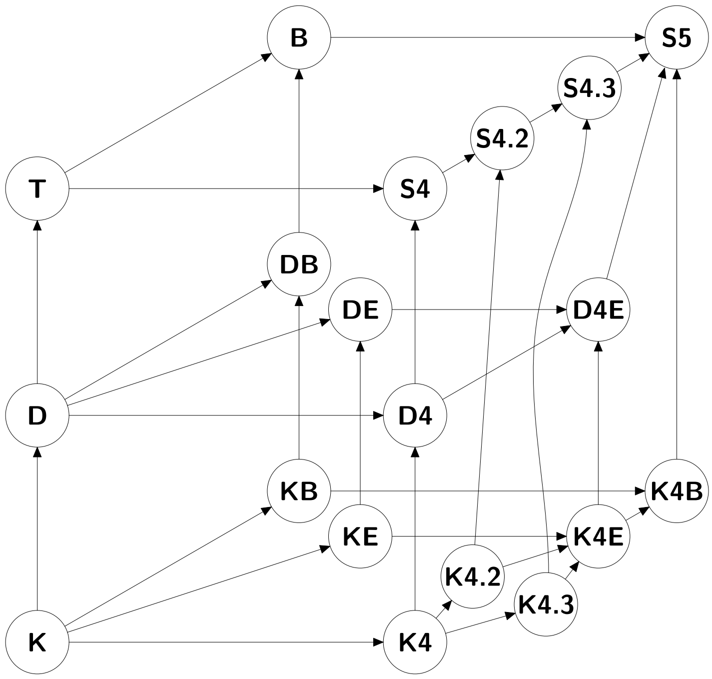

Abbildung B.2: Erweiterte Hierarchie modaler Logiken zwischen **K** und **S5**.

Nicht-Inklusionen.

(1) Da es transitive, reflexive Relationen ohne Vorwärtsverzweigung gibt, die nicht euklidisch sind (z. B. $R = \{(u, u), (u, v), (u, w), (v, v), (v, w), (w, w)\}$ über $W = \{u, v, w\}$), gilt **S4.3** $\not\supseteq$ **KE**. Daraus folgt, dass keine der Logiken **S4.3**, **K4.3**, **S4.2**, **K4.2** eines der Systeme **KE**, **K4E**, **DE**, **D4E**, **K4B**, **S5** enthält.

(2) Da es transitive, reflexive Relationen ohne Vorwärtsverzweigung gibt, die nicht symmetrisch sind (z. B. $R = \{(u, u), (u, v), (v, v)\}$ über $W = \{u, v\}$), gilt **S4.3** $\not\supseteq$ **KB**. Daraus folgt, dass keine der Logiken **S4.3**, **K4.3**, **S4.2**, **K4.2** eines der Systeme **KB**, **DB**, **B** enthält.

(3) Da es transitive, reflexive, zusammenlaufende Relationen gibt, die nicht ohne Vorwärtsverzweigung sind (z. B. $R = \{(u, u), (u, v), (u, w), (u, x), (v, v), (v, x), (w, w), (w, x), (x, x)\}$ über $W = \{u, v, w, x\}$), gilt **S4.2** $\not\supseteq$ **K4.3**. Daraus folgt, dass keine der Logiken **S4.2**, **K4.2**, **S4**, **T**, **D4**, **D**, **K4**, **K** eines der Systeme **K4.3**, **S4.3** enthält.

(4) Da es transitive, reflexive Relationen gibt, die nicht zusammenlaufend sind (z. B. $R = \{(u, u), (u, v), (u, w), (v, v), (w, w)\}$ über $W = \{u, v, w\}$), gilt

S4 $\not\supseteq$ **K4.2**. Daraus folgt, dass keine der Logiken **S4**, **T**, **D4**, **D**, **K4**, **K** eines der Systeme **K4.2**, **S4.2** enthält.

(5) Da nach Abschnitt B.1 **B** $\not\supseteq$ **K4** gilt, enthält keine der Logiken **B**, **DB**, **KB** eines der Systeme **K4.2**, **K4.3**, **S4.2**, **S4.3**.

(6) Da nach Abschnitt B.1 **D4E** $\not\supseteq$ **T** gilt, enthält keine der Logiken **D4E**, **DE**, **KE**, **K4E**, **K4.3**, **K4.2** eines der Systeme **S4.2**, **S4.3**.

(7) Da nach Abschnitt B.1 **DE** $\not\supseteq$ **K4** gilt, enthält keine der Logiken **DE**, **KE** eines der Systeme **K4.2**, **K4.3**.

(8) Da nach Abschnitt B.1 **K4B** $\not\supseteq$ **D** gilt, enthält keine der Logiken **K4B**, **K4.3**, **K4.2** eines der Systeme **D**, **D4**, **T**, **S4**, **S4.2**, **S4.3**.

(9) Da es transitive Relationen ohne Vorwärtsverzweigung gibt, die nicht zusammenlaufend sind (z. B. $R = \{(u, v), (u, w), (v, w)\}$ über $W = \{u, v, w\}$), gilt **K4.3** $\not\supseteq$ **K4.2**.

Damit sind alle Nicht-Inklusionen gezeigt (einige davon mehrfach). Abbildung B.2 gibt somit die Beziehungen zwischen den 19 Systemen exakt wieder.

B.3 Normale Systeme mit $\mathsf{Alt_n}$, $\mathsf{T_c}$, Triv, Ver

Hier werden folgende Systeme zueinander und zu den bisher betrachteten in Beziehung gesetzt:

$\mathbf{KAlt_n} = \mathbf{K} + \mathsf{Alt_n}$ $\qquad \mathbf{T_c} = \mathbf{K} + \mathsf{T_c}$ $\qquad \mathbf{Triv} = \mathbf{K} + \mathsf{Triv}$

$\mathbf{Ver} = \mathbf{K} + \mathsf{Ver}$

Wie sich im Folgenden zeigen wird, fallen von diesen Systemen keine zwei zusammen. Es fällt auch keine dieser Logiken mit einem der bisher untersuchten Systeme zusammen.

Inklusionen.

(1) Wenn für eine Relation R jede Welt höchstens n R-Nachfolger hat, dann hat selbstverständlich jede Welt auch höchstens $n + 1$ R-Nachfolger. Deshalb gilt die Inklusionskette $\mathbf{K} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{KAlt_2} \subseteq \mathbf{KAlt_1}$.

(2) Da für jede Relation R mit der Eigenschaft $\forall v \forall w(vRw \Rightarrow v = w)$ jede Welt aus W höchstens einen Nachfolger hat, gilt $\mathbf{KAlt_1} \subseteq \mathbf{T_c}$.

(3) Da jede Relation R mit der Eigenschaft $\forall v \forall w(vRw \Rightarrow v = w)$ auch transitiv und symmetrisch ist, gilt $\mathbf{K4B} \subseteq \mathbf{T_c}$.

(4) Da jede Relation mit der Eigenschaft $\forall v \forall w(vRw \Leftrightarrow v = w)$ auch eine Äquivalenzrelation ist, gilt $\mathbf{S5} \subseteq \mathbf{Triv}$.

(5) Selbstverständlich gelten auch die Beziehungen $\mathbf{T_c} \subseteq$ **Triv**, **Ver**.

Diese Inklusionsbeziehungen rechtfertigen das Erweitern der bisherigen Hierarchie wie in Abbildung B.3 angegeben.

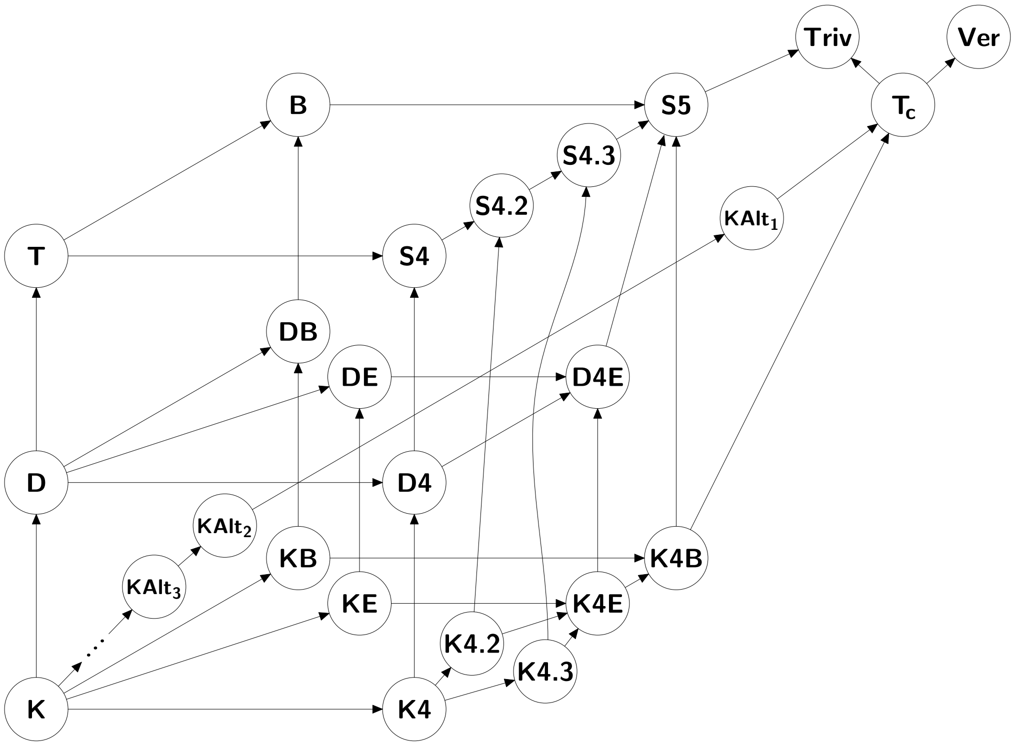

Abbildung B.3: Hierarchie modaler Logiken zwischen **K** und **Triv** bzw. **Ver**.

Nicht-Inklusionen.

(1) Da es für jedes $n \geq 1$ Relationen über Mengen gibt, bezüglich derer jede Welt höchstens, aber eine Welt genau $n+1$ Nachfolger hat, gilt $\mathbf{KAlt_{n+1}} \not\supseteq \mathbf{KAlt_n}$.

(2) Da es Relationen gibt, bezüglich derer jede Welt höchstens einen Nachfolger hat, die aber weder total noch symmetrisch noch euklidisch noch transitiv sind (z. B. $R = \{(u, v), (v, w)\}$ über $W = \{u, v, w\}$), gilt $\mathbf{KAlt_1} \not\supseteq$ **D**, **KB**, **KE**, **K4**. Daraus folgt, dass alle Logiken $\mathbf{KAlt_n}$ keines der übrigen Systeme (außer **K** und $\mathbf{KAlt_m}$, $m \geq n$) enthalten.

(3) Da es für jedes n Äquivalenzrelationen gibt, bezüglich derer eine Welt mehr als n Nachfolger hat (z. B. $R = W \times W$ für $W = \{w_1, \ldots, w_{n+1}\}$), gilt $\mathbf{S5} \not\supseteq \mathbf{KAlt_n}$. Daraus folgt, dass keine der Logiken $\mathbf{KAlt_n}$, $\mathbf{T_c}$, **Triv**, **Ver** in einem der Systeme zwischen **K** und **S5** enthalten ist.

(4) Da die leere Relation über einer beliebigen Menge W nicht total ist, gilt $\mathbf{Ver} \not\supseteq \mathbf{D}$. Daraus folgt, dass keine der Logiken **Ver**, $\mathbf{T_c}$ eines der Systeme zwischen **D** und **Triv** enthält.

(5) Selbstverständlich gelten auch die Beziehungen $\mathbf{T_c} \not\supseteq \mathbf{Ver}$ und $\mathbf{Ver} \not\supseteq \mathbf{Triv}$.

Damit sind alle Nicht-Inklusionen gezeigt (einige davon mehrfach). Abbildung B.3 gibt somit die Beziehungen zwischen allen Systemen exakt wieder.

Literaturverzeichnis

[1] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema: *Modal Logic.* Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 53. Cambridge University Press 2001.

[2] E. Grädel: Why are modal logics so robustly decidable? *Bulletin of the EATCS*, **68** (1999), 90–103.

[3] J. Y. Halpern, Y. Moses: A guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief. *Artificial Intelligence*, **54** (1992), 311–379.

[4] G. E. Hughes, M. J. Cresswell: *A New Introduction to Modal Logic.* Routledge, London, 1996.

[5] R. E. Ladner: The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic. *SIAM Journal on Computing*, **6 (3)** (1977), 467–480.

[6] I. Rewitzky: *Description Logics for Knowledge Representation.* Skript zur Vorlesung „Formal Methods in Artificial Intelligence“, University of Cape Town, 2001, 73 S.

Verzeichnis der Abbildungen

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Jena, 2. September 2002 Thomas Schneider