Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski, Renate Klempien-Hinrichs
Studiengang Informatik
MZH 3260, Tel.: 2956, 3697 (Sekr.), Fax: 4322
E-Mail: {kreo, rena}@informatik.uni-bremen.de

10. Dezember 2001
Aufgaben 3

Algebraische Spezifikation

3. Übungsblatt

Geübt werden die Äquivalenz von Termen und die Quotiententermalgebra (vgl. Definition 4.7 im Skript).

In einer Menge kommt ein Element ein- oder keinmal vor. In einer *Multimenge* (engl. *multiset* oder *bag*) darf ein Element mehrfach vorkommen. Formal ist eine Multimenge M über einer Menge A definiert als eine Abbildung $M\colon A \to \mathbb{N}$, die jedem Element $a \in A$ seine Häufigkeit $M(a)$ zuordnet. Die leere Multimenge ist $\oslash$ mit $\oslash(a) = 0$ für alle $a \in A$, und die Menge aller Multimengen über A wird mit $\mathbb{N}^A$ bezeichnet.
Die Summe zweier Multimengen $M_1, M_2 \in \mathbb{N}^A$ ist $M_1 \oplus M_2$ mit $M_1 \oplus M_2(a) = M_1(a) + M_2(a)$ für alle $a \in A$. Daraus folgt, dass $\oplus$ assoziativ und kommutativ ist, d.h. für alle Multimengen $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{N}^A$ gilt $M_1 \oplus (M_2 \oplus M_3) = (M_1 \oplus M_2) \oplus M_3$ und $M_1 \oplus M_2 = M_2 \oplus M_1$.
Die Operation $\mathsf{add}\colon A \times \mathbb{N}^A \to \mathbb{N}^A$ fügt ein Element a zu einer Multimenge M dazu, was definiert ist als $\mathsf{add}(a, M) = \wr a \int \oplus M$. Dabei ist $\wr a \int$ die Multimenge, die genau einmal a enthält und sonst nichts (d.h. $\wr a \int(a')$ ist 1, falls $a = a'$ ist, und 0 sonst).

Die folgenden Spezifikationen sollen den Datentyp der Multimengen über einer endlichen Menge beschreiben.

spec MSet0 =
  sorts A, $MSet$
  opns $a_1, \ldots, a_n\colon \to A$
    $\emptyset\colon \to MSet$
    $add\colon A \times MSet \to MSet$

spec MSet = MSet0
  opns $sum\colon MSet \times MSet \to MSet$
  eqns $add(x, add(y, m)) = add(y, add(x, m))$
    $sum(m, \emptyset) = m$
    $sum(m, add(x, m')) = add(x, sum(m, m'))$

1. Zeige die folgenden Äquivalenzen für MSet, wobei die Terme $t_1, t_2, t_3 \in T_{\text{MSet0},MSet}$ nur aus den Konstanten $\emptyset$ und a_i, $i = 1, \ldots, n$, sowie dem Operationssymbol *add* aufgebaut sind und $a \in T_{\text{MSet0},A}$ ist.

   (a) $sum(\emptyset, \emptyset) \equiv \emptyset$
   (b) $sum(t_1, \emptyset) \equiv t_1$
   (c) $sum(\emptyset, t_2) \equiv t_2$
   (d) $sum(sum(\emptyset, t_1), t_2) \equiv sum(t_1, t_2)$
   (e) $t_1 \equiv sum(\emptyset, sum(t_1, \emptyset))$
   (f) $sum(sum(t_1, t_2), t_3) \equiv sum(t_1, sum(t_2, t_3))$
   (g) $add(a, sum(t_1, t_2)) \equiv sum(add(a, t_1), t_2)$
   (h) $sum(t_1, t_2) \equiv sum(t_2, t_1)$

2. Es soll gezeigt werden, dass die Algebra BAG mit

   - $\mathsf{BAG}_A = \{a_1, \ldots, a_n\}$,
   - $\mathsf{BAG}_{MSet} = \mathbb{N}^A$,
   - $a_{i,\mathsf{BAG}} = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$,
   - $\emptyset_{\mathsf{BAG}} = \oslash$,
   - $add_{\mathsf{BAG}} = \mathsf{add}$ und
   - $sum_{\mathsf{BAG}} = \oplus$

   eine initiale MSet-Algebra ist.

   Die Quotiententermalgebra T_{MSet} ist bekannlich initiale MSet-Algebra. Daher genügt es zu zeigen, dass T_{MSet} und BAG isomorph sind, d.h. dass BAG eine MSet-Algebra und der somit eindeutig existierende Homomorphismus

   $$init\colon T_{\text{MSet}} \to \mathsf{BAG}$$

   ein Isomorphismus ist.

   Beweise dazu im einzelnen:

   (a) Die Gleichungen von MSet gelten in BAG.
   (b) *init* ist surjektiv.
   (c) *init* ist injektiv.

Abgabe bis zum 8. Januar 2002.