Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski, Renate Klempien-Hinrichs
Studiengang Informatik
MZH 3260, Tel.: 2956, 3697 (Sekr.), Fax: 4322
E-Mail: {kreo, rena}@informatik.uni-bremen.de

22. Juni 2000
Aufgaben 5

Theoretische Informatik 1

5. Übungsblatt

Um den Umgang mit und das Erstellen von *while*-Programmen zu erleichtern, ist es sinnvoll, oft benutzten Konstrukten Namen zu geben, sich also sozusagen Abkürzungen für Programmstücke zu definieren. Diese Abkürzungen heißen *Makro-Anweisungen.* Ein Beispiel ist die Makro-Anweisung $X := Y$, die definiert ist als $begin\ X := succ(Y); X := pred(X)\ end$. Hierbei stehen X und Y für beliebige Variablen Xi und Xj. Nachdem wir dies jetzt definiert haben, können wir Anweisungen der Form $X := Y$ wie jede andere Anweisung in *while*-Programmen benutzen. Insbesondere kann man sie zur Definition weiterer Makro-Anweisungen einsetzen, zum Beispiel für $Z := X + Y$, was definiert ist als

```
begin
  U := X; V := 0;
  while V ≠ Y do
  begin
    U := succ(U);
    V := succ(V)
  end;
  Z := U
end
```

Hierbei sind U und V Hilfsvariablen, von denen wir annehmen, dass sie immer so gewählt werden, dass sie unter den ansonsten benutzten Variablen eines Programms nicht vorkommen. Dies kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, da in jedem Programm nur endlich viele der potentiell zur Verfügung stehenden Variablen $X1, X2, \ldots$ vorkommen und daher $U = Xi$ und $V = Xj$ immer geeignet gewählt werden können.

1. Definiere die folgenden Operatoren als Makro-Anweisungen:

   - die Multiplikation $Z := X \cdot Y$,
   - die Division mit Rest $Z := X \operatorname{div} Y$ (wobei $X \operatorname{div} 0$ undefiniert sein soll),
   - der Rest $Z := X \bmod Y$ der Division (wobei $X \bmod 0$ undefiniert sein soll),
   - die Exponentiation $Z := X^Y$.

   Dabei kann jeweils von den bereits definierten und den oben erwähnten Makro-Anweisungen sowie der in Aufgabe 2 betrachteten Makro-Anweisung $Z := X \dot{-} Y$ Gebrauch gemacht werden (letztere könnte sich insbesondere für div als nützlich erweisen). (40%)

2. Die Makro-Anweisung $Z := X \dot{-} Y$, die Z die Differenz der Werte von X und Y zuweist, falls diese größer als Null ist, und 0 sonst, sei wie folgt definiert:

```
begin
  U := X; V := Y; W := 0;
  while V ≠ W do
  begin
    U := pred(U);
    V := pred(V)
  end;
  Z := U
end
```

   Weise für $(X, Y, Z, U, V, W) = (X1, \ldots, X6)$ folgende Behauptung nach:

   Falls $a_0 A_1 a_1 \cdots A_n a_n$ eine Berechnung dieses *while*-Programms ist, wobei $a_i = (x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i)$ für $i = 0, \ldots, n$, so gilt $z_n = x_0 \dot{-} y_0$.

   Benutze dabei folgende (durch Induktion zu beweisende!) Behauptung:

   Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: falls $k \leq y_0$, so ist $u_{3k+3} \dot{-} v_{3k+3} = x_0 \dot{-} y_0$.

   (Falls die Behauptung gilt, wird die Aussage $U \dot{-} V = X \dot{-} Y$ auch als *Schleifeninvariante* bezeichnet.) (30%)

3. Die Menge der *Ausdrücke* sei induktiv wie folgt definiert, wobei jeder Ausdruck in Abhängigkeit eines Berechnungszustands $(x_1, \ldots, x_k)$ einen *Wert* erhält.

   - Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist ein Ausdruck mit dem Wert n, und jede Variable Xi ist ein Ausdruck mit dem Wert x_i.
   - Sind E und E' Ausdrücke, so auch $E + E'$, $E \dot{-} E'$, $E \cdot E'$, $E \operatorname{div} E'$, $E \bmod E'$ und $E^{E'}$. Haben E und E' die Werte e und e' bezüglich $(x_1, \ldots, x_k)$, so haben die genannten Ausdrücke die Werte $e + e'$, $e \dot{-} e'$, $e \cdot e'$, $e \operatorname{div} e'$, $e \bmod e'$ und $e^{e'}$.

   Zeige, dass es für jeden Ausdruck E eine Makro-Anweisung $Z := E$ gibt, die der Variablen Z den Wert von E (bezüglich des jeweiligen Berechnungszustandes) zuweist und alle anderen Werte (mit Ausnahme der Werte neu einzuführender Hilfsvariablen) unberührt lässt. (20%)

4. Definiere eine der beiden folgenden Makro-Anweisungen: (10%)

   - *repeat* S *until* $X = Y$,
     welche S solange ausführt, bis $X = Y$ gilt, jedoch mindestens einmal,
   - *for* $X = 1$ *to* n *do* S,
     welche S n-mal ausführt.

Abgabe: 4. Juli 2000 in den Tutorien.