Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski, Dr. Sabine Kuske
Studiengang Informatik
Linzer Str. 9a
OAS 3001, 3005
Tel.: 2956, 2335, 3697 (Sekr.), Fax: 4322
E-Mail: {kreo,kuske}@informatik.uni-bremen.de
www.informatik.uni-bremen.de/theorie

25. Oktober 2004
Aufgaben 1

Theoretische Informatik I

1. Übungsblatt

Die Aufgaben beziehen sich auf Kapitel 2 des Skripts. Geübt werden Operationen auf Wörtern und ihre Eigenschaften – insbesondere solche, die sich mit vollständiger Induktion zeigen lassen. Beim Lösen der Aufgaben dürfen alle Eigenschaften verwendet werden, die im zweiten Kapitel bereits gezeigt sind. Alle durchgeführten Umformungen sollen begründet werden.

1. Da die Menge der Wörter über einem Alphabet A rekursiv definiert werden kann, lassen sich viele Operationen auf Wörtern rekursiv beschreiben. Zum Beispiel ist — wie im Skript (Kapitel 2) beschrieben — die Operation $\mathit{length}\colon A^* \to \mathbb{N}$ durch die beiden Gleichungen $\mathit{length}(\lambda) = 0$ und $\mathit{length}(xw) = \mathit{length}(w) + 1$ definiert mit $x \in A$ und $w \in A^*$.

   Dass die Definition rekursiv ist, lässt sich daran erkennen, dass die zweite Gleichung bei der Berechnung von $\mathit{length}(xw)$ die Operation *length* erneut mit dem Wort w als Eingabe aufruft. Ist w bereits das leere Wort, wird nun die erste Gleichung angewendet; ansonsten erneut die zweite.

   Schreibe eine Operation $\mathit{cut}\colon \mathbb{N} \times A^* \to A^*$, so dass $\mathit{cut}(n, w)$ die ersten n Zeichen von w ausgibt, falls $\mathit{length}(w) \geq n$ ist; ansonsten soll w ausgegeben werden. Die Operation soll rekursiv definiert werden und aus drei Gleichungen bestehen, die die Fälle $\mathit{cut}(0, w)$, $\mathit{cut}(n, \lambda)$ und $\mathit{cut}(n + 1, xw)$ mit $x \in A$, $w \in A^*$ und $n \in N$ abdecken. 20%

2. Die Operation $\mathit{trans}\colon A^* \to A^*$ mit $\mathit{trans}(\lambda) = \lambda$ und $\mathit{trans}(xw) = \mathit{trans}(w)x$ für $x \in A$ und $w \in A^*$ dreht jede Zeichenkette um, d.h. aus $x_1 \cdots x_n$ wird $x_n \cdots x_1$.

   Beweise die folgenden beiden Behauptungen mit vollständiger Induktion.

   (a) $\mathit{trans}(vw) = \mathit{trans}(w)\mathit{trans}(v)$ für alle $v, w \in A^*$; 20%

   (b) $\mathit{trans}(\mathit{trans}(w)) = w$ für alle $w \in A^*$. 20%

3. Ein Palindrom ist ein Wort, das vor- wie rückwärts gelesen dasselbe ist (wie z.B. OTTO, ANNA, bädöfügüfödäb usw.). Mit Hilfe von *trans* lässt sich der Test $\mathit{palindrom}\colon A^* \to \mathit{BOOL}$ mit $\mathit{BOOL} = \{\mathit{true}, \mathit{false}\}$ wie folgt definieren:

$$\mathit{palindrom}(u) = \begin{cases} \mathit{true} \text{ falls } u = \mathit{trans}(u) \\ \mathit{false} \text{ sonst.} \end{cases}$$

Weise die beiden folgenden Eigenschaften ohne Induktion nach.

(a) $palindrom(w\, trans(w)) = true$ für alle $w \in A^*$; (20%)

(b) $palindrom(wx\, trans(w)) = true$ für alle $w \in A^*$, $x \in A$. (20%)

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind spätestens in der Woche vom 08.11.2004 in den Tutorien abzugeben.