Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski, Dr. Sabine Kuske
Studiengang Informatik
Linzer Str. 9a
OAS 3001, 3005
Tel.: 2956, 2335, 3697 (Sekr.), Fax: 4322
{kreo,kuske}@informatik.uni-bremen.de
www.informatik.uni-bremen.de/theorie

1. November 2010
Aufgaben 1

Theoretische Informatik I

Arbeitsbogen zum 1. Übungsblatt

1. Betrachte die Operation $\mathit{flip}\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $\mathit{flip}(\lambda) = \lambda$, $\mathit{flip}(0u) = 1\mathit{flip}(u)$ und $\mathit{flip}(1u) = 0\mathit{flip}(u)$ für alle $u \in \{0,1\}^*$. Zeige die folgenden Behauptungen mittels vollständiger Induktion über den Aufbau von Wörtern:

   (a) $\mathit{flip}(uv) = \mathit{flip}(u)\mathit{flip}(v)$ für alle $u, v \in \{0,1\}^*$.

   (b) $\mathit{length}(\mathit{flip}(u)) = \mathit{length}(u)$ für alle $u \in \{0,1\}^*$.

2. Zeige für alle $x \in A$ und $u, v \in A^*$

$$\mathit{count}(x, uv) = \mathit{count}(x, u) + \mathit{count}(x, v).$$

3. Betrachte die Operation $\mathit{subst}\colon A^* \times A \times A^* \to A^*$, die für alle $x, y \in A$ und $u, v \in A^*$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \mathit{subst}(u, x, \lambda) &= \lambda \\ \mathit{subst}(u, x, yv) &= \begin{cases} u\,\mathit{subst}(u, x, v) & \text{falls } x \equiv y \\ y\,\mathit{subst}(u, x, v) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

   Zeige die folgenden Eigenschaften mittels vollständiger Induktion über den Aufbau von Wörtern.

   (a) $\mathit{count}(x, \mathit{subst}(u, x, v)) = \mathit{count}(x, u) \cdot \mathit{count}(x, v)$ für alle $x \in A$, $u, v \in A^*$.

   (b) $\mathit{length}(\mathit{subst}(u, x, v)) = \mathit{length}(v) + \mathit{count}(x, v) \cdot (\mathit{length}(u) - 1)$ für alle $x \in A$, $u, v \in A^*$.

4. Betrachte das Alphabet $\mathit{DNA} = \{A, C, G, T\}$ mit der Watson-Crick-Komplementarität $\bar{A} = T$, $\bar{C} = G$, $\bar{G} = C$ und $\bar{T} = A$. Die Wörter in DNA^* sind geeignete Beschreibungen von einsträngigen DNA-Molekülen. Die doppelsträngigen DNA-Moleküle, die als spiralförmige Doppelhelices allgemein bekannt sind, bestehen aus zwei einsträngigen Molekülen, die komplementär zueinander sind. Die Operation $\mathit{compl}\colon \mathit{DNA}^* \to \mathit{DNA}^*$ konstruiert zu jedem DNA-Strang den komplementären Strang. Sie ist folgendermaßen definiert:

(i) $compl(\lambda) = \lambda$

(ii) $compl(xu) = compl(u)\bar{x}$ für alle $x \in DNA$ und $u \in DNA^*$.

(a) Berechne $compl(ACCGTC)$, den zu $ACCGTC$ komplementären Strang.

(b) Zeige für alle $u \in DNA^*$

$$length(compl(u)) = length(u).$$

(c) Zeige, dass für alle $x \in DNA$ und $u \in DNA^*$

$$count(x, compl(u)) = count(\bar{x}, u).$$

Anmerkung: Die Operation *compl* spielt eine ganz wesentliche Rolle bei der Untersuchung und Verwendung von DNA-Molekülen und beruht auf der berühmten Watson-Crick-Komplementarität. Komplementäre Stränge haben eine große Relevanz beim Entwurf von Biochips, die dem Nachweis bestimmter DNA- und RNA-Stränge in Flüssigkeiten wie Blut, Abwasser u.ä. dienen. Vereinfacht werden dabei kurze einsträngige Moleküle auf den Chip aufgebracht, die dann Moleküle "einfangen" können, die einen komplementären Strang als Teilsequenz enthalten.

5. Betrachte die Operation $split\colon A^* \to A^*$ mit $split(\lambda) = \lambda$, $split(x) = \lambda$ und $split(xyu) = y\, split(u)$ für alle $x, y \in A$ und alle $u \in A^*$. Zeige die folgende Behauptung mittels vollständiger Induktion:

$$length(split(w)) = length(w) \operatorname{div} 2 \text{ für alle } w \in A^*.$$

6. Definiere rekursiv die Operation $last\colon A^* \times \mathbb{N} \to A^*$, welche die ersten n Zeichen des Eingabewortes abschneidet, d.h.,

$$last(x_1 \cdots x_k, n) = \begin{cases} x_{n+1} \cdots x_k, & \text{falls } k > n \\ \lambda \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $x_1, \ldots, x_k \in A$ und $k, n \in \mathbb{N}$.

7. Zeige, dass für alle $u, v \in A^*$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(a) $uv = vu$.

(b) Es gibt $w \in A^*$ und $m, n \in \mathbb{N}$, so dass $u = w^m$ und $v = w^n$.