Fragestellungen

- Sind kontextfreie Sprachen kompositional? (Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern.)
- Ist für kontextfreie Sprachen das Wortproblem schnell lösbar?(Die von determinitischen Kellerautomaten erkannten Sprachen lassen sich in linearer Zeit erkennen.)
- Wie hängen Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen zusammen? (Kellerautomaten erkennen genau die kontextfreien Sprachen.)
- Was können Kellerautomaten nicht?

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Zu jeder kontextfreien Sprache L existiert ein $p \in \mathbb{N}$, so dass gilt:
Ist $z \in L$ mit $length(z) \geq p$ dann lässt sich z schreiben als $z = uvwxy$, wobei

- $length(vwx) \leq p$,
- $vx \neq \lambda$ und
- $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Anwendung des Pumping-Lemmas

Mit Hilfe des Pumping-Lemmas kann gezeigt werden, dass bestimmte Sprachen nicht kontextfrei sind.

Behauptung

Die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis (Skizze)

Annahme: L ist kontextfrei.

Sei p die Konstante aus dem Pumping-Lemma.

Sei $z = a^p b^p c^p$ (d.h., $z \in L$ und $length(z) \geq p$), und sei $z = uvwxy$ mit $length(vwx) \leq p$ und $vx \neq \lambda$.

1.Fall: $vx = a^m b^n$ mit $1 \leq m + n \leq p$. Dann gilt $uv^0wx^0y = a^{p-m}b^{p-n}c^p \notin L$. (Widerspruch)

2.Fall: $vx = b^m c^n$ mit $1 \leq m + n \leq p$. Analog.

Korollar. Die Klasse $\mathcal{L}_{KFS}$ der kontextfreien Sprachen ist unter Schnitt nicht abgeschlossen.

Beweisidee: Die Sprachen $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ sind kontextfrei, ihr Schnitt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ aber nicht.