Dr. Frank Drewes
Studiengang Informatik
MZH 3270, Tel.: 4335
E-Mail: drewes@informatik.uni-bremen.de

3. Februar 1999

Theoretische Informatik 2

– Ergänzungen zum Skript (4) –

Übersetzung von Kellerautomaten in kontextfreie Grammatiken

Diese Ergänzung zum Skript zeigt, wie sich Kellerautomaten in kontextfreie Grammatiken übersetzen lassen. Dies vervollständigt den Beweis der Äquivalenz von Kellerautomaten und kontextfreien Grammatiken und stellt damit gewissermaßen die Fortsetzung zu Ergänzung (2) dar.

Die Übersetzung macht von zwei Beobachtungen Gebrauch, die auch für sich genommen von Interesse sind. Erstens können Kellerautomaten, ohne dass sich an der Mächtigkeit etwas ändert, auch so definiert werden, dass Endkonfigurationen die mit leerem Keller sind (wodurch die Endzustände redundant und damit verzichtbar werden). Zweitens können Konfigurationsfolgen abhängig vom Kellerinhalt der ersten Konfiguration in Teilfolgen zerlegt werden. Präziser ausgedrückt, gelten folgende Eigenschaften:

(1) Für jeden Kellerautomaten K gibt es einen Kellerautomaten K' mit $L(K') = L(K)$, so dass ein Wort u genau dann in $L(K')$ ist, wenn die Anfangskonfiguration für u in eine Konfiguration der Form (s, λ, λ) (mit beliebigem s) überführbar ist.

(2) Sei $K = (Z, I, C, \delta, s_0, F, c_0)$ ein Kellerautomat, $z, z' \in Z$, $u \in I^*$ und $\gamma = c_1 \cdots c_n \in C^*$. Eine Konfigurationsfolge $(z, u, \gamma) \overset{*}{\longmapsto} (z', \lambda, \lambda)$ existiert genau dann, wenn es Zustände $z_0, \ldots, z_n \in Z$ und eine Zerlegung $u = u_1 \cdots u_n$ von u in Teilwörter $u_1, \ldots, u_n$ gibt, so dass $z = z_0$, $z' = z_n$ und $(z_{i-1}, u_i, c_i) \overset{*}{\longmapsto} (z_i, \lambda, \lambda)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Zum Beweis von (1) sei $K = (Z, I, C, \delta, s_0, F, c_0)$. $K' = (Z', I, C', \delta', s_0', F', c_0')$ wird so konstruiert, dass für alle Konfigurationsfolgen $(s_0', u, c_0') \overset{*}{\longmapsto} (s, v, \gamma)$ von K' genau dann $s \in F'$ gilt, wenn $\gamma = \lambda$. Die Grundidee ist, dass K' wie K arbeitet, sich jedoch im ersten Schritt den „Boden“ des Kellers markiert, indem er dort das initiale Kellersymbol c_0' (welches in K nicht vorkommt) zurücklässt. Bei Erreichen eines Endzustandes von K kann K' (in dem dieser Zustand kein Endzustand ist) in einen Zustand s_1 übergehen, dessen Aufgabe es ist, den Keller zu leeren und bei Erreichen von c_0' in den (neuen und einzigen) Endzustand s_f von K' zu wechseln. Während dieser ganzen letzten Phase werden vom Eingabewort keine Zeichen mehr gelesen.

Dementsprechend ist $Z' = Z \cup \{s_0', s_1, s_f\}$, $C' = C \cup \{c_0'\}$ und $F = \{s_f\}$ (wobei $s_0', s_1, s_f \notin Z$ und $c_0' \notin C$). Die Überführungsrelation δ' von K' ist diejenige von K, wobei aber zusätzlich

- $\delta'(s_0', c_0') = (s_0, c_0 c_0')$,
- $(s_1, \lambda) \in \delta'(s, \text{-}, c)$ für alle $s \in F \cup \{s_1\}$ und $c \in C$ und
- $\delta'(s, \text{-}, c_0') = (s_f, \lambda)$ für alle $s \in F \cup \{s_1\}$.

Offenbar gilt $L(K') = L(K)$; auf den (einfachen) Beweis wird hier verzichtet. Nach Konstruktion hat K' die oben behauptete Eigenschaft, denn die einzige Möglichkeit, einen leeren Keller zu erhalten, ist durch die letzte Zeile der Definition von δ' gegeben, welche gleichzeitig die einzige Möglichkeit darstellt, in den Endzustand s_f zu gelangen.

Nun zum Beweis von (2). In Bezug auf die Richtung „$\Leftarrow$“ ergibt sich, wenn für $i = 1, \ldots, n$ Konfigurationsfolgen $(z_{i-1}, u_i, c_i) \overset{*}{\longmapsto} (z_i, \lambda, \lambda)$ existieren, nach Definition von Konfigurationsfolgen auch

$$(z_0, u_1 \cdots u_n, c_1 \cdots c_n) \overset{*}{\longmapsto} (z_1, u_2 \cdots u_n, c_2 \cdots c_n) \overset{*}{\longmapsto} \cdots \overset{*}{\longmapsto} (z_n, \lambda, \lambda).$$

(Wer daran zweifelt, kann es zur Übung per Induktion nachweisen. Wenn man es ganz korrekt machen will, muss man dazu allerdings zwei Induktionen schachteln: Die äussere geht über n, die innere über die Länge der ersten Konfigurationsfolge.)

Die andere Richtung von (2) wird mittels Induktion über n bewiesen. Für $n = 0$ kann die Folge $(z, u, \lambda) \overset{*}{\longmapsto} (z', \lambda, \lambda)$ nur $(z, \lambda, \lambda) \overset{0}{\longmapsto} (z, \lambda, \lambda)$ sein, so dass die Behauptung mit $z = z_0 = z'$ erfüllt ist. Betrachte jetzt also ein $n > 0$ und nimm an, die Behauptung gelte für $n - 1$. Da die betrachtete Konfigurationsfolge mit dem Kellerinhalt $\gamma = c_1 \cdots c_n$ anfängt und mit leerem Keller endet, muss sie die Form

$$(z, u, \gamma) \overset{*}{\longmapsto} (z_1, u', c_2 \cdots c_n) \overset{*}{\longmapsto} (z', \lambda, \lambda)$$

haben, wobei $(z_1, u', c_2 \cdots c_n)$ die erste Konfiguration mit $n - 1$ Kellersymbolen ist. Da Konfigurationsübergänge nach Definition von $\longmapsto$ immer nur vom Zustand, vom obersten Kellersymbol und vom ersten Zeichen der verbleibenden Wortes abhängen, gilt somit auch $(z_0, u_1, c_1) \overset{*}{\longmapsto} (z_1, \lambda, \lambda)$, wobei $z_0 = z$ und $u = u_1 u'$. Damit ist der Beweis komplett, denn die Induktionsvoraussetzung, angewendet auf $(z_1, u', c_2 \cdots c_n) \overset{*}{\longmapsto} (z', \lambda, \lambda)$, liefert die restlichen benötigten Teilfolgen $(z_1, u_2, c_2) \overset{*}{\longmapsto} (z_2, \lambda, \lambda), \ldots, (z_{n-1}, u_n, c_n) \overset{*}{\longmapsto} (z_n, \lambda, \lambda)$ (mit $z_n = z'$). ■

Die beiden Beobachtungen liefern alles Nötige für die Übersetzung von Kellerautomaten in kontextfreie Grammatiken.

Lemma

Für jeden Kellerautomaten K gibt es eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L(K)$.

Beweis Nehme o.B.d.A. an, $K = (Z, I, C, \delta, s_0, F, c_0)$ habe die in (1) angegebene Form. Die Konstruktion von G basiert auf der Idee, Nichtterminale der Form $\langle z, c, z' \rangle$ mit $z, z' \in Z$ und $c \in C$ zu verwenden, aus denen die Produktionen alle Wörter $u \in I^*$ abzuleiten erlauben, für die es eine Konfigurationsfolge $(z, u, c) \overset{*}{\longmapsto} (z', \lambda, \lambda)$ gibt. Beobachtung (2) zufolge ist dies durch folgende Produktionsmenge P zu realisieren: Für alle $z, z_0, \ldots, z_n \in$

Z, $c, c_1, \ldots, c_n \in C$ und $a \in I \cup \{\text{-}\}$ mit $(z_0, c_1 \cdots c_n) \in \delta(z, a, c)$ enthält P die Produktion

$$\langle z, c, z_n \rangle ::= a \langle z_0, c_1, z_1 \rangle \cdots \langle z_{n-1}, c_n, z_n \rangle$$

falls $a \in I$ und die Produktion

$$\langle z, c, z_n \rangle ::= \langle z_0, c_1, z_1 \rangle \cdots \langle z_{n-1}, c_n, z_n \rangle$$

falls $a = \text{-}$.

Durch Induktion über n wird nun für alle $z, z' \in Z$, $c \in C$ und $u \in I^*$ gezeigt, dass eine Ableitung $\langle z, c, z' \rangle \xrightarrow[P]{n} u$ genau dann existiert, wenn $(z, u, c) \overset{n}{\longmapsto} (z', \lambda, \lambda)$. Für $n = 0$ gilt die Behauptung, da es weder eine solche Ableitung noch eine solche Konfigurationsfolge gibt.

Für $n > 0$ sind zwei Fälle zu betrachten. Eine Ableitung

$$\langle z, c, z' \rangle \xrightarrow[P]{} a \langle z_0, c_1, z_1 \rangle \cdots \langle z_{n-1}, c_n, z_n \rangle \xrightarrow[P]{n-1} a u_1 \cdots u_n = u$$

mit den Teilableitungen $\langle z_{i-1}, c_i, z_i \rangle \xrightarrow[P]{m_i} u_i$ (wobei $z_n = z'$) gibt es genau dann, wenn $(z_0, c_1 \cdots c_n) \in \delta(z, a, c)$ gilt und ausserdem für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ Konfigurationsfolgen $(z_{i-1}, u_i, c_i) \overset{m_i}{\longmapsto} (z_i, \lambda, \lambda)$ existieren (wobei Letzteres die Induktionsvoraussetzung benutzt). Nach Beobachtung (2) ist dies genau dann der Fall, wenn die Konfigurationsfolge

$$(z, u, c) \longmapsto (z_0, u_1 \cdots u_n, c_1 \cdots c_n) \overset{m_1}{\longmapsto} (z_1, u_2 \cdots u_n, c_2, \cdots c_n) \overset{m_2}{\longmapsto} \cdots \overset{m_n}{\longmapsto} (z_n, \lambda, \lambda)$$

existiert. Ein analoger Schluss zeigt, dass es eine Ableitung der Form

$$\langle z, c, z' \rangle \xrightarrow[P]{} \langle z_0, c_1, z_1 \rangle \cdots \langle z_{n-1}, c_n, z_n \rangle \xrightarrow[P]{n-1} u_1 \cdots u_n = u$$

genau dann gibt, wenn die Konfigurationsfolge

$$(z, u, c) \longmapsto (z_0, u_1 \cdots u_n, c_1 \cdots c_n) \overset{m_1}{\longmapsto} (z_1, u_2 \cdots u_n, c_2, \cdots c_n) \overset{m_2}{\longmapsto} \cdots \overset{m_n}{\longmapsto} (z_n, \lambda, \lambda)$$

existiert, was den Induktionsbeweis abschließt.

Definiere nun $G = (\{S\} \cup Z \times C \times Z, I, P_0 \cup P, S)$ mit $P_0 = \{S ::= \langle s_0, c_0, s \rangle \mid s \in Z\}$. Dann ergibt sich zusammen mit dem oben Bewiesenen für alle $u \in I^*$

$$\begin{aligned} u \in L(G) \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle s_0, c_0, s \rangle \xrightarrow{*} u \quad \text{für ein } s \in Z \\ &\Longleftrightarrow \quad (s_0, u, c_0) \overset{*}{\longmapsto} (s, \lambda, \lambda) \quad \text{für ein } s \in Z \\ &\Longleftrightarrow \quad u \in L(K), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. ∎