Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski, Dr. Sabine Kuske
Studiengang Informatik
Linzer Str. 9a
OAS 3001, 3005
Tel.: 2956, 2335, 3697 (Sekr.), Fax: 4322
E-Mail: {kreo,kuske}@informatik.uni-bremen.de
www.informatik.uni-bremen.de/theorie

24. Mai 2004
Aufgaben 3

Theoretische Informatik 2

3. Übungsblatt

1. Minimaler Aufwand

   Bisher wurde der Aufwand von Operationen genau ermittelt oder nach oben abgeschätzt. Hier sollen nun untere Schranken für den Aufwand untersucht werden.

   (a) Betrachte die Spezifikation **mergesort** aus Abschnitt 3.7 des Skripts. Gib für alle $m, n \geq 1$ Eingabewörter $u, v \in \mathbb{N}^*$ der Längen $\mathit{length}(u) = m$ und $\mathit{length}(v) = n$ an, so dass die Auswertung von $\mathit{merge}(u, v)$ mindestens $m + n$ Schritte braucht. (15%)

   (b) Betrachte die Spezifikation **quicksort** vom 2. Übungsblatt. Zeige, dass die Auswertung von $\mathit{qsort}(w)$ für Eingabewörter w der Länge n, die falsch herum sortiert sind, mindestens $n^2 + 3n$ Schritte braucht. Gilt das auch für Eingabewörter, die richtig herum sortiert sind? (25%)

2. Matrizenmultiplikation

   Der klassische Algorithmus zur Multiplikation von (n, n)-Matrizen benötigt n^3 Multiplikationen und $n^3 - n^2$ Additionen. Dagegen verwendet der Algorithmus von Winograd $\frac{1}{2}n^3 + n^2$ Multiplikationen und $\frac{3}{2}n^3 + 2n^2 - 2n$ Additionen.

   (a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ arbeitet der Algorithmus von Winograd effizienter, wenn eine Multiplikation gegenüber einer Addition fünfmal soviel Zeit benötigt? (15%)

   (b) Zeige, dass der Algorithmus von Winograd zur Matrizenmultiplikation nicht effizienter ist als der klassische, wenn Addition und Multiplikation gleich viel Zeit benötigen. (15%)

3. Aufwandsklassen

   Für Funktionen $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt $g \in O(f)$ genau dann, wenn natürliche Zahlen c, n_0 existieren, so dass $g(n) \leq c \cdot f(n)$ für alle $n \geq n_0$.

   (a) Zeige, dass $n^2 < 2^n$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$. (15%)

   (b) Zeige, dass $n \notin O(\mathrm{ld}\, n)$. (15%)

   Aus 3a und 3b folgt, dass $O(\mathrm{ld}\, n)$ echt in $O(n)$ enthalten ist.

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind spätestens in der Woche vom 07.06.04 abzugeben.