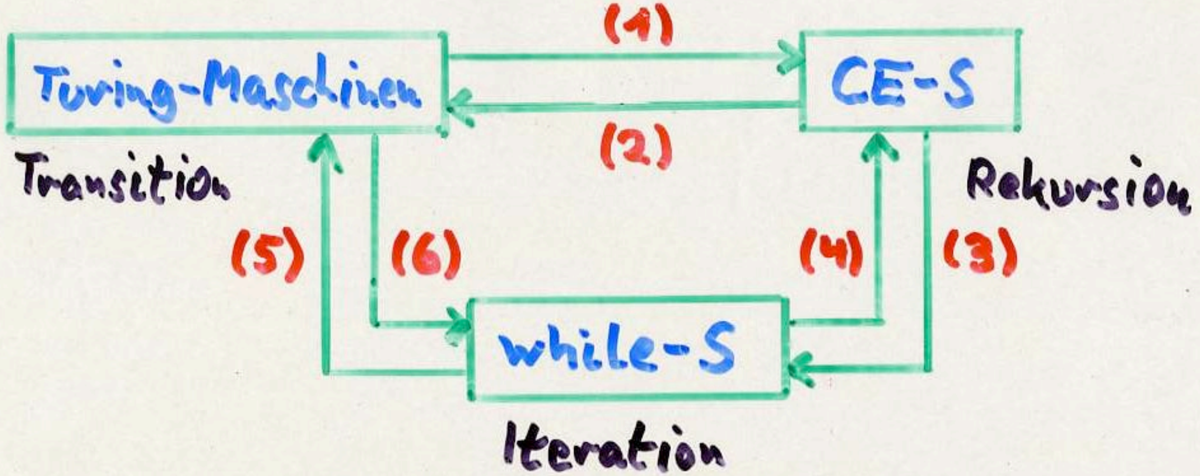
Vergleich von Berechenbarkeitsmodellen



(1) Zustände als rekursive Funktionen auf dem Band
(2) CE-S-Vorwärtsinterpreter als Turing-Maschine
(3) CE-S-Vorwärtsinterpreter iteriert (z.B. mit Stack)
(4) rekursive Form der Berechnung
(5) Berechnung auf Band einer Turing-Maschine
(6) while-Schleife, die die Schritte einer TM vollzieht
(2) & (5) nach Turingscher These (Churchscher These)
(i) Komposition von (j) & (k) (geeignet gewählt)

Syntax von while-S

- Programmform: name

  vars: $X_1 \in D_1, \dots, X_k \in D_k$

  {<compound> $\xrightarrow{*}$} body

- mit folgenden Syntaxregeln (BNF):

<compound> ::= begin <stmtList> end

<stmtList> ::= <stmt> | <stmt> ; <stmtList>

<stmt> ::= <assign> | <compound> | <Loop> | <case>

<assign> ::= X_i := t {Term des Typs D_i}

<Loop> ::= while b do <stmt> {BOOL-Term}

<case> ::= if b then <stmt> [else <stmt>]

{optional}

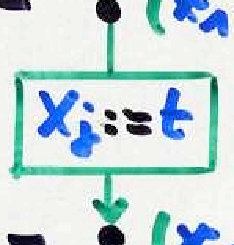
Zustandstransformationssemantik

Eingang — ∘ $a_0 = (x_{01}, \dots, x_{0k}) \in D_1 \times \dots \times D_k$

Anfangszustand

vorher — • $(x_1, \dots, x_k) = a$ Berechnungszustand ist Wertzuweisung

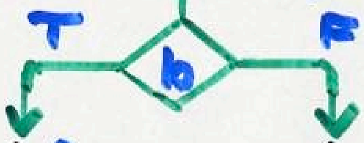
aktuelle Instruktion



nachher — • $(x_1, \dots, x_{j-1}, a[t], x_{j+1}, \dots, x_k)$

vorher — • $(x_1, \dots, x_k) = a$

aktuelle Instruktion



nachher — • a falls $a[b] = T$ • a falls $a[b] = F$

Ausgang — ▫ $a_{end} = (y_1, \dots, y_k)$ Endzustand (nur bei Termination) zum Beispiel....

flip

opns: $\mathit{flip} : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$

vars: $u \in \{0,1\}^*$

eqns: $\mathit{flip}(\lambda) = \lambda$

$\mathit{flip}(0u) = 1\,\mathit{flip}(u)$

$\mathit{flip}(1u) = 0\,\mathit{flip}(u)$

... in CE-S

flip

```
vars: U, V ∈ {0,1}*
begin
  V := U ; U := λ;
  while V ≠ λ do
    begin
      if head(V)=0 then U := U1
                   else U := U0;
      V := tail(V)
    end
end
```

.... in while-S

Berechnung von flip

(u_0, v_0) $V := U$ (u_0, u_0) $U := \lambda$ (λ, u_0) $V \neq \lambda$ $\begin{cases} T: (\lambda, u_0) \ \mathrm{head}(V) = 0 \begin{cases} T: \dots \\ F: \end{cases} \\ F: (\lambda, \lambda) \ \text{Endzustand} \end{cases}$

(u_i, v_i) $V \neq \lambda$ $\begin{cases} T: (u_i, v_i) \ \mathrm{head}(V) = 0 \begin{cases} T: (u_i, v_i) \ U := U1 \ (u_i 1, v_i) \\ F: (u_i, v_i) \ U := U0 \ (u_i 0, v_i) \end{cases} = (u_{i+3}, v_i) \ V := \mathrm{tail}(V) \\ F: (u_i, \lambda) \ \text{Endzustand} \end{cases}$

$(u_{i+3}, \mathrm{tail}(v_i)) = (u_{i+4}, v_{i+4})$ $V \neq \lambda$ ……

Eigenschaften von flip

(1) für $k = 0, \ldots, \mathrm{length}(u_0)$ gilt:

   (i) $u_{2+4k}\,\mathrm{flip}(v_{2+4k}) = \mathrm{flip}(u_0)$

   (ii) $\mathrm{length}(u_{2+4k}) = k$

(2) $(u_{2+4\,\mathrm{length}(u_0)}, 1)$ ist Endzustand

(3) insbes.: $u_{2+4\,\mathrm{length}\,u_0} = \mathrm{flip}(u_0)$

Beweis von (1) mit Induktion über k

IA: $k=0$: $(u_2, v_2) = (\lambda, u_0)$ nach Konstruktion und somit
$u_2\, flip(v_2) = \lambda\, flip(u_0) = flip(u_0)$ & $length(u_2) = length(\lambda) = 0$

IV: Behauptung gelte für $k \geq 0$

IS: $k+1$: nach Konstruktion gilt:

$(u_{2+4(k+1)}, v_{2+4(k+1)}) \underset{i=2+4k}{=} (u_{i+4}, v_{i+4}) = (u_{i+3}, tail(v_i)) = (u_i x_i, tail(v_i))$
für $x_i = 1$, falls $head(v_i) = 0$, und $x_i = 0$ sonst (d.h. $head(v_i) = 1$)

nach IV gilt: $u_i\, flip(v_i) = flip(v_0)$ & $length(u_i) = k$

daraus folgt zusammen mit der CE-S-Spezifikation von $flip$:

$u_{2+4(k+1)}\, flip(v_{2+4(k+1)}) = u_i x_i\, flip(tail(v_i))$
$u_i\, flip(head(v_i)\, tail(v_i)) = u_i\, flip(v_i) \underset{IV}{=} flip(v_0)$

$length(u_{2+4(k+1)}) = length(u_i x_i) = length(u_i) + length(x_i) = k+1$

Berechnung von while-S-Programmen in CE-S

- Zustandstransformationssemantik von while-S-Programm P ist (partielle) Funktion $st(P): D_1 \times \cdots \times D_k \to D_1 \times \cdots \times D_k$
- sei $st(P)(x_1, \ldots, x_k) = (y_1, \ldots, y_k)$ und $st_i(P)(x_1, \ldots, x_k) = y_i$ für $i = 1, \ldots, k$; dann gilt:

  $$st(P)(x_1, \ldots, x_n) = (st_1(P)(x_1, \ldots, x_k), \ldots, st_k(P)(x_1, \ldots, x_k))$$
- Variablen von bestimmen Definitionsbereich; Rumpf den Ablauf der Berechnung
- Anweisung (wie der Rumpf) sind o.B.d.A. Elemente von $CHAR^*$

state transformation

opns: $st_i : CHAR^* \times D_1 \times \cdots \times D_k \to D_i \quad (i = 1, \ldots, k)$

vars: $x_1 \in D_1, \ldots, x_k \in D_k$; $stmt, stmtlist, b, xpr \in CHAR^*$

eqns:

$st_i(\text{begin } stmtlist \text{ end}, x_1, \ldots, x_k) = st_i(stmtlist, x_1, \ldots, x_k)$

$st_i(stmt; stmtlist, x_1, \ldots, x_k) =$

$\qquad st_i(stmtlist, st_1(stmt, x_1, \ldots, x_k), \ldots, st_k(stmt, x_1, \ldots, x_k))$

$st_i(\text{while } b \text{ do } stmt, x_1, \ldots, x_k) = \text{if } eval(b, x_1, \ldots, x_k)$[1]

$\qquad \text{then } st_i(stmt; \text{while } b \text{ do } stmt, x_1, \ldots, x_k) \text{ else } x_i$

$st_i(X_j := xpr, x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} eval(xpr, x_1, \ldots, x_k)^{[1]} & \text{für } i = j \\ x_i & \text{sonst} \end{cases}$

---

1) CE-S-Spezifikation für Termauswertung vorausges.