Chomsky-Hierarchie (Grammatiken & Sprachen)

Typ	Bez.	Automaten	Wortproblem..		
0	allg.	Turing-Maschinen	(Reduktion Haltepr.)		
1	kontext-sensitiv, monoton	linear beschränkte Automaten	PSPACE = NPSPACE		
2	kontext-frei	Keller-automaten	$O(n^3)$ (CKY)		
3	rechtslinear, regulär	endliche Automaten (auch det.)	$O(n)$ (←)		

Wortproblem für monotone Grammatiken

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine monotone Grammatik und $w_0 \in T^*$.
Dann kann man folgendermaßen algorithmisch feststellen, ob $w_0 \in L(G)$. Dafür sei $n = \text{Length}(w_0)$.

(i) $S_0 = \{S\}$,

(ii) $S_{k+1} = S_k \cup \{w \in (N \cup T)^* \mid v \xrightarrow[P]{} w,\ v \in S_k, \text{Length}(w) \leq n\}$,

(iii) wähle kleinstes m mit $S_m = S_{m+1}$.

Dann gilt: $S_m = \{w \in (N \cup T)^* \mid S \xrightarrow[P]{*} w,\ \text{Length}(w) \leq n\}$

Und damit insbesondere: $w_0 \in L(G)$ g.d.w. $w_0 \in S_m$.

Beweis

(1) Existenz von m: $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_k \subseteq S_{k+1} \subseteq \cdots \subseteq K_n = \{w \in (N \cup T)^* \mid \text{length}(w) \leq n\}$.

endlich

(2) $w \in S_k$ impliziert $S \xrightarrow[p]{*} w$.

(IA) $k=0$: $w \in S_0 = \{S\}$ impliziert $w = S$. Es gilt $S \xrightarrow[p]{0} S = w$.

(IS) $k+1$: $w \in S_{k+1}$ impliziert $w \in S_k$ und damit nach (IV) $S \xrightarrow[p]{*} w$ oder $v \xrightarrow[p]{} w$ für $v \in S_k$. Dann gilt $S \xrightarrow[p]{*} v$ nach (IV) und somit $S \xrightarrow[p]{*} v \xrightarrow[p]{} w$.

(3) $S \xrightarrow[p]{\ell} w$ mit $\text{Length}(w) \leq n$ impliziert $w \in S_m$.

(IA) $S \xrightarrow[p]{0} w$ impliziert $w = S \in \{S\} = S_0 \subseteq S_m$.

(IS) $S \xrightarrow[p]{\ell+1} w$ impliziert $S \xrightarrow[p]{\ell} v$ und $v \xrightarrow[p]{} w$.

Wegen der Monotonie gilt $\text{Length}(v) \leq n$, so dass nach (IV) folgt $v \in S_m$.

Somit $w \in S_{m+1} = S_m$.

Chomsky-Hierarchie (Grammatiken & Sprachen)

Typ	Bez.	Automaten	Wortproblem	Leerheitspr.	
0	allg.	Turing-Maschinen	– (Reduktion Haltepr.)	–	
1	kontext-sensitiv, monoton	Linear beschränkte Automaten	PSPACE = NPSPACE	–	
2	kontext-frei	Keller-automaten	$O(n^3)$ (CKY)	+	
3	rechts-linear, regulär	endliche Automaten (auch det.)	$O(n)$ (←)	+	

Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Dann lässt sich $N_{terminate} = \{A \in N \mid A \overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} u, u \in T^*\}$ folgendermaßen algorithmisch bestimmen:

(i) $N_0 = \{A \in N \mid (A ::= u) \in P, u \in T^*\}$,

(ii) $N_{k+1} = N_k \cup \{A \in N \mid (A ::= u) \in P, u \in (N_k \cup T)^*\}$,

(iii) wähle kleinstes m mit $N_m = N_{m+1}$.

Dann gilt: $N_{terminate} = N_m$.

Chomsky-Hierarchie (Grammatiken & Sprachen)

Typ	Bez.	Automaten	Wortproblem	Leerheitspr.	Durchschnitts-leerheitspr.
0	allg.	Turing-Maschinen	$-$ (Reduktion Haltepr.)	$-$	$-$
1	kontext-sensitiv monoton	linear beschränkte Automaten	PSPACE = NPSPACE	$-$	$-$
2	kontext-frei	Keller-automaten	$O(n^3)$ (CKY)	+	$-$
3	rechts-linear, regulär	endliche Automaten (auch det.)	$O(n)$ ($\leftarrow$)	+	+

Postsches Korrespondenzproblem

- ▷ $PCP = ((u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n))$ mit $u_i, v_j \in T^*$
- ▷ PCP lösbar, wenn $i_1 \cdots i_k$ mit $k \leqslant 1$ existiert, derart dass

$$u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k} .$$

Theorem: Lösbarkeit Postscher Korrespondenzprobleme ist nicht entscheidbar (für $\emptyset \neq T \neq \{a\}$).

Beispiel: $((aabb, a, aba), (b, aa, bab))$

Lösungsbeispiel: $2\ 2\ 1\ 3\ 2$

mit $a \,\vdots\, a \,\vdots\, aabb \,\vdots\, aba \,\vdots\, a = aa \,\vdots\, aa \,\vdots\, b \,\vdots\, bab \,\vdots\, aa$

Durchschnittsleerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken

- G_{mirror} mit den Produktionen $S ::= \$ \mid xSx$ für $x \in T$.

  Es gilt: $L(G_{mirror}) = \{ w \$ \operatorname{trans}(w) \mid w \in T^* \}$.

- G_{PCP} mit den Produktionen $\left.\begin{array}{l} S ::= u_i A \operatorname{trans} v_i \\ A ::= \$ \mid u_i A \operatorname{trans} v_i \end{array}\right\} i = 1, \dots, n$

  Es gilt: $L(G_{PCP}) = \{ u_{i_1} \cdots u_{i_k} \$ \operatorname{trans}(v_{i_1} \cdots v_{i_k}) \mid 1 \leq i_j \leq n,\ k \geq 1 \}$

Beobachtung: PCP lösbar g.d.w. $L(G_{PCP}) \cap L(G_{mirror}) \neq \emptyset$.

Theorem: Das Durchschnittsleerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken ist nicht entscheidbar.