die Insel der Berechenbarkeit ....

NP PSPACE CE-J

P PASCALchen JAVA

▲ aufzählbar TM HASKELL

- Halteproblem
- Lösbarkeit Postscher Korrespondenz-Probleme
- Wortproblem Typ 0
- Durchschnittsleerheitsproblem Typ 2

▲ überabzählbar

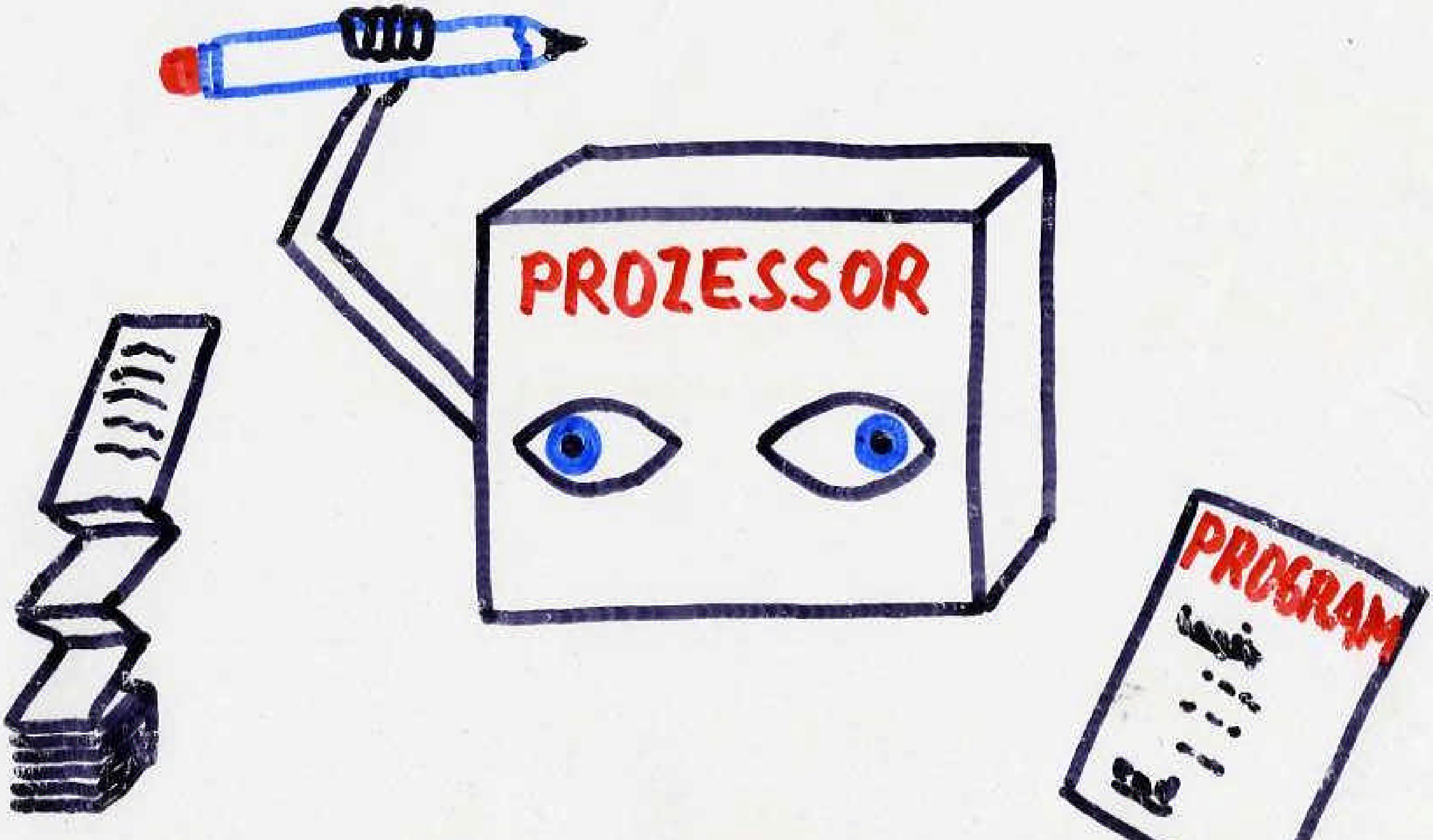
.... im unberechenbaren Ozean

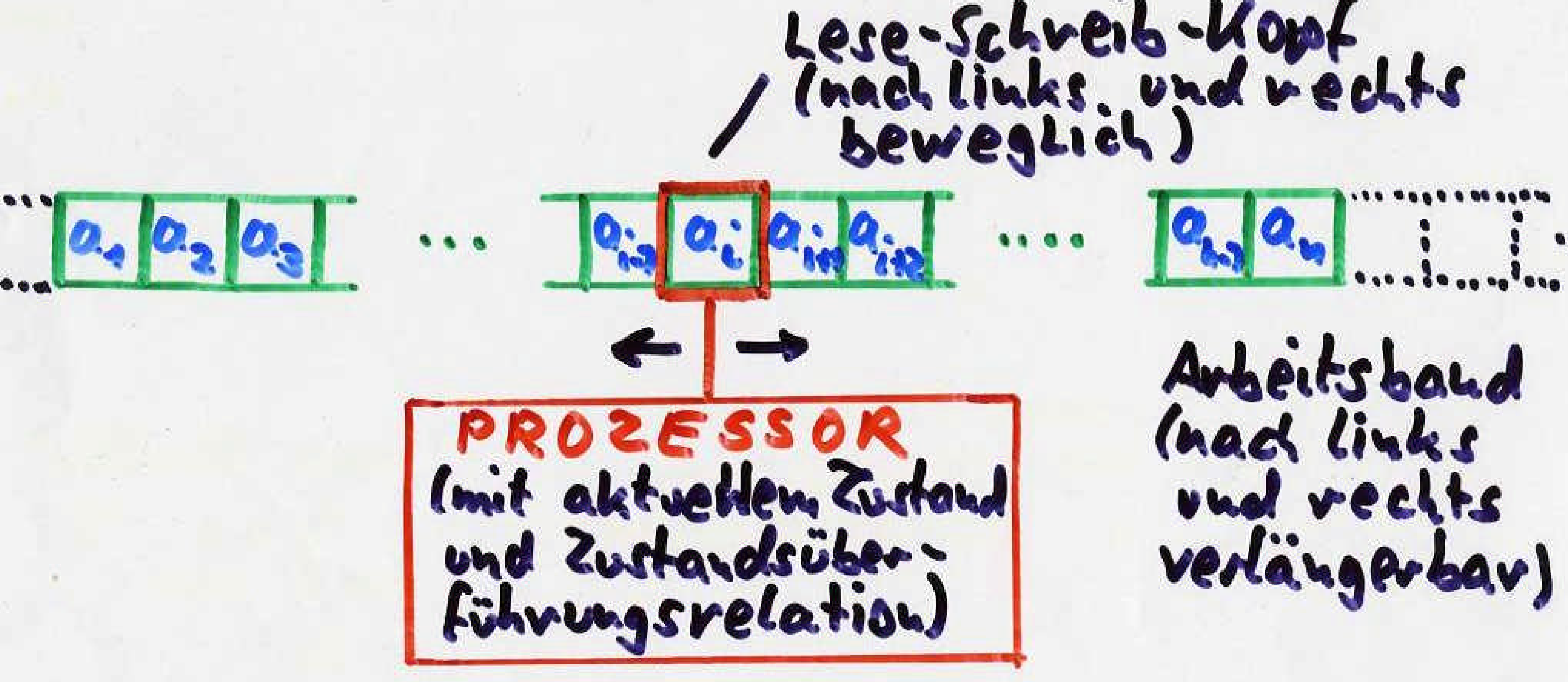
Berechenbarkeit

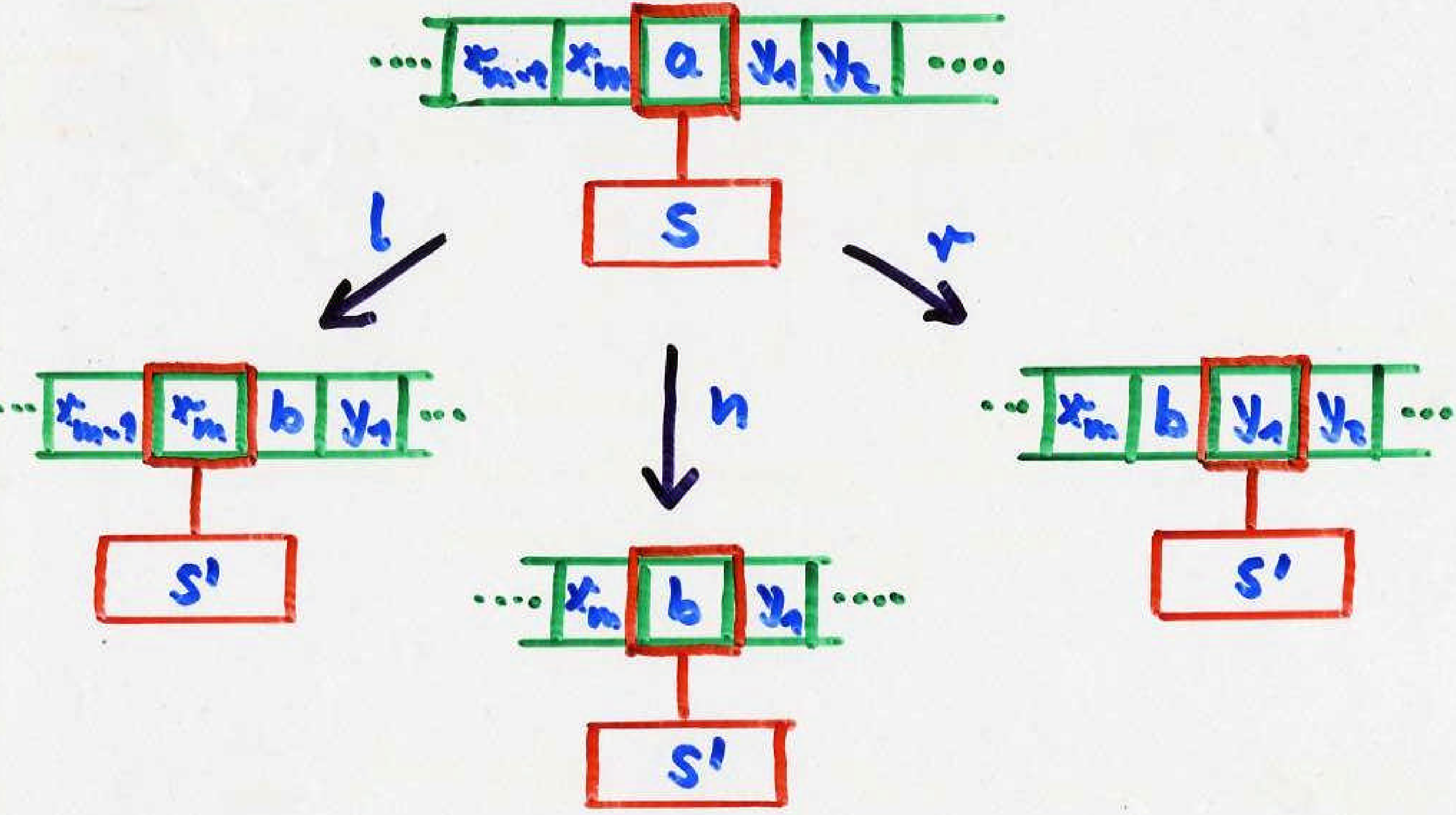
- alles algorithmisch Machbare

- hängt das vom Rechner ab?
- hängt das vom Betriebssystem o.ä. ab?
- hängt das von der Programmiersprache ab?
- hängt das vom Berechenbarkeitsmodell ab?
  - maschinennah: Turing-Maschinen z.B.
  - funktional, logisch u.ä.: CE-S
  - imperativ, iterativ u.ä.: while-S
  - neu: OO, DNA & Quantum Computing, agents, ...

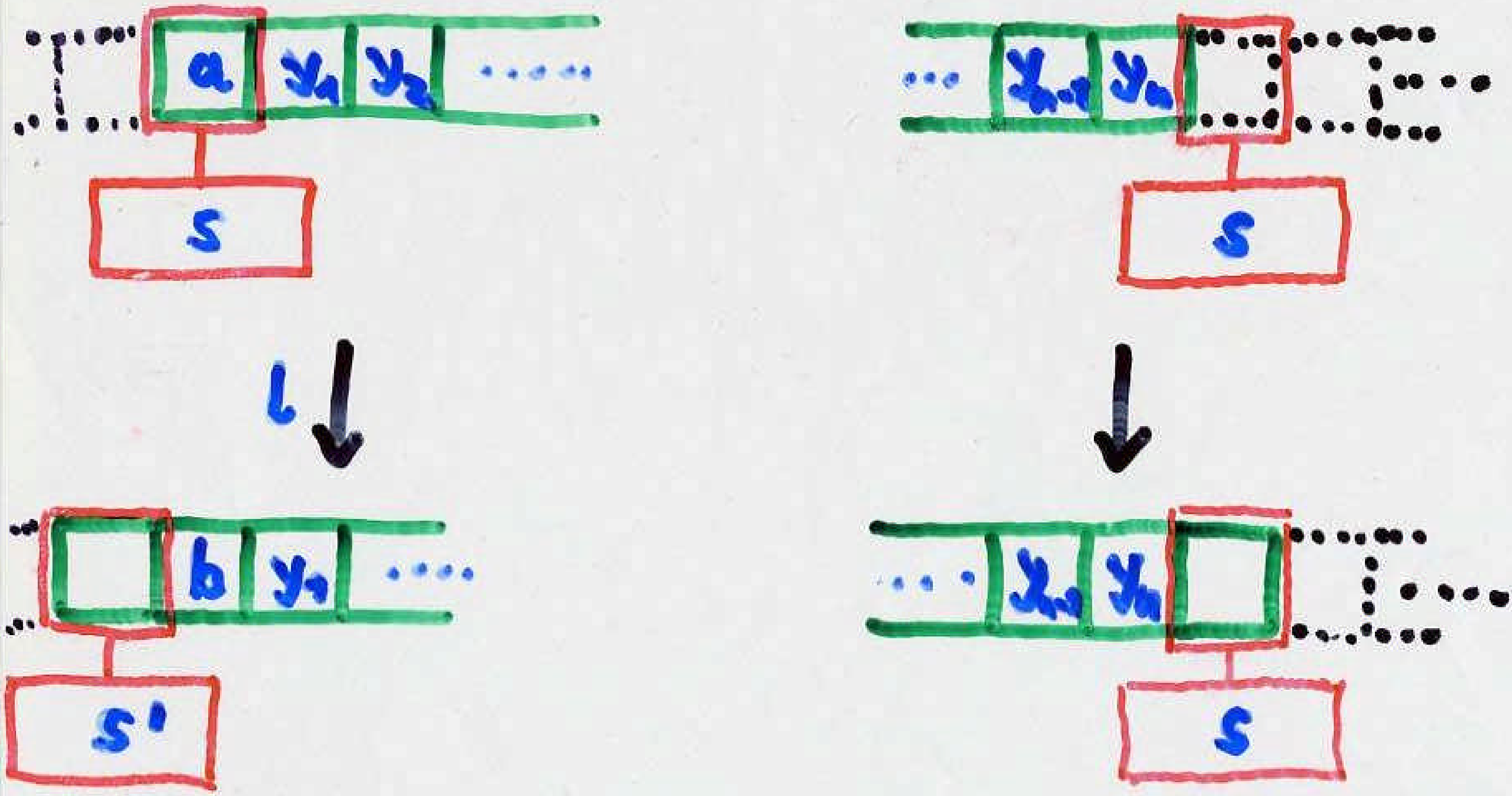
Gestatten: Turing-Maschine




Lese-Schreib-Kopf
(nach links und rechts
beweglich)
a_1 a_2 a_3 … a_{i-1} a_i a_{i+1} a_{i+2} …. a_{n-1} a_n
PROZESSOR
(mit aktuellem Zustand
und Zustandsüber-
führungsrelation)
Arbeitsband
(nach links
und rechts
verlängerbar)



Lesen von a im aktuellen Zustand s bewirkt Schreiben von b, neuen Zustand s' und Kopfbewegung laut Zustandsüberführung


a
y_1
y_2
s
l
b
y_1
s'
y_{n-1}
y_n
s
y_{n-1}
y_n
s

Turing-Maschine

$$TM = (S, A, d, s_0, F)$$

- S: Zustandsmenge
- A: Alphabet
- d: Zustandsüberführung mit
- s_0: Anfangszustand
- F: Menge der Endzustände

$$d(s,a) \subseteq S \times (A \cup \{\square\}) \times \{l, n, r\}$$

für alle $s \in S$ und $a \in A \cup \{\square\}$ sowie

$d(s', a) = \emptyset$ f. a. $s' \in F$

$\square$: leeres Feld

TM deterministisch, falls $d(s,a)$ höchstens 1elementig

Konfiguration usv mit $s \in S$ und $u, v \in (A \cup \{\square\})^*$

Anfangskonfiguration $\lambda s_0 w$ mit $w \in A^*$

Endkonfiguration $us'v$ mit $s' \in F$ und $v \in A^*$

Folgekonfiguation für $s \in S; a, c \in A; u, v \in (A \cup \{\square\})^*$

$usav \mapsto us'bv$ für $(s', b, n) \in d(s, a)$

$usav \mapsto ubs'v$ für $(s', b, r) \in d(s, a)$

$$\left.\begin{array}{l} ucsav \mapsto us'cbv \\ \lambda sav \mapsto s'\square bv \end{array}\right\} \text{ für } (s', b, l) \in d(s, a)$$

$us\lambda \mapsto us\square$

▷ Arbeitsweise von TM ist beliebige Iteration der Folgekonfigurationsbildung $\overset{*}{\longmapsto}$

Turing-berechenbare Funktion

Sei $f: A^* \to A^*$ partielle Funktion.

Dann wird f durch TM berechnet, wenn für alle $v, w \in A^*$ gilt:

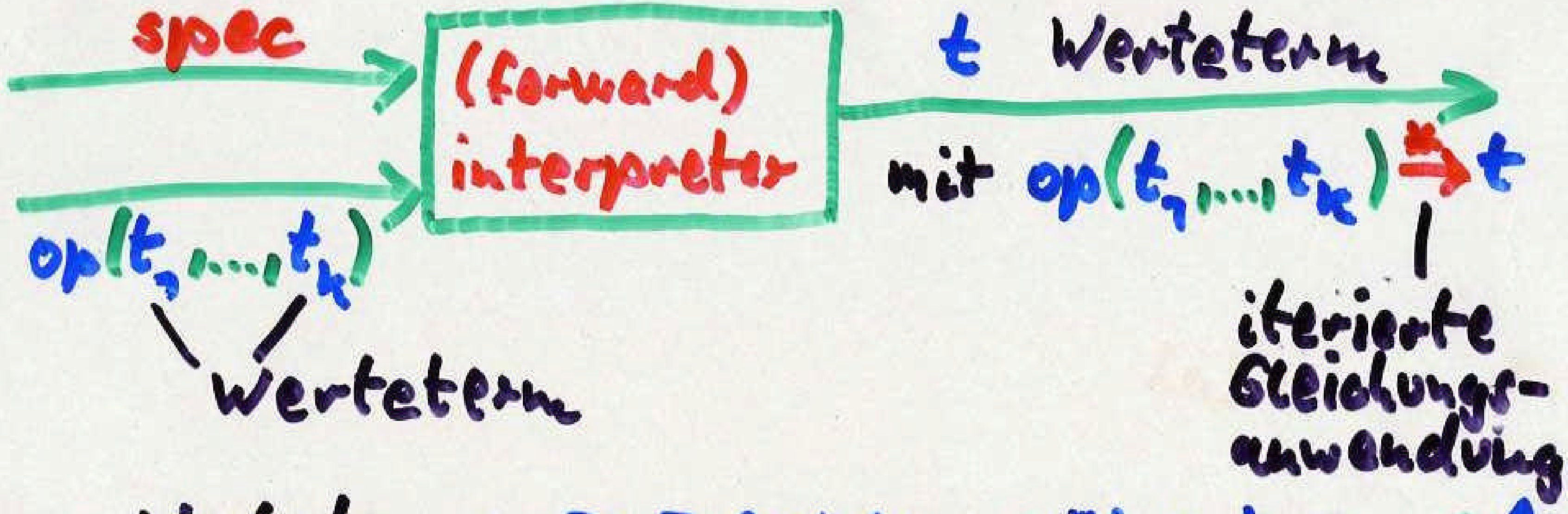
$f(w) = v$ gdw. $\llcorner s_0 w \overset{*}{\longmapsto} u s' v$

für geeignete $s' \in F$, $u \in A'^*$

$(A' = A \cup \{\square\})$

Schreibweise dafür: $f = f_{TM}$

(Vorwärts-) Interpreter & Theorembeweiser



- Werteterme: T, F; $0, 1, 2, \dots \in \mathbb{N}$; $a, b, c, \dots \in A$; $\epsilon, a_1 \dots a_n \in A^*$ für $a_i \in A$, $n \geq 1$

CE-S-berechenbare Funktion

Eine partielle Funktion $f : D_1 \times \cdots \times D_k \rightarrow D$ ist CE-S-berechenbar, falls eine CE-S-Spezifikation spec(f) mit einer Operationsdeklaration $\hat{f} : D_1 \times \cdots \times D_k \rightarrow D$ existiert, derart dass für alle $a_i \in D_i$ *), $i = 1, \ldots, k$ und $a \in D$ *) gilt:

$$\underbrace{f(a_1, \ldots, a_k) = a}_{\text{gleich in } D} \text{ g.d.w. } \underbrace{\hat{f}(a_1, \ldots, a_k) = a}_{\text{gleichwertig (mit Vorwärtsauswertung)}}$$

---

*) Datenelemente sind genau Grundterme

Theorem: Turing-Berechenbarkeit impliziert CE-S-Berechenbarkeit

Sei $TM = (S, A, d, s_0, F)$ Turing-Maschine, die die Funktion $f : A^* \to A^*$ berechnet, d.h. für alle $v, w \in A^*$ gilt:

$$f(w) = v \quad \text{g.d.w.} \quad \vdash s_0 w \overset{*}{\longmapsto} us'v \text{ für } s' \in F \text{ und } u \in (A \cup \{\square\})^*$$

Betrachte die CE-S-Spezifikation spec(TM). Dann gilt (wegen der ersten und letzten Gleichung):

$$\hat{f}(w) \xrightarrow{*} v \quad \text{g.d.w.} \quad \hat{f}(w) \to f_{s_0}(\vdash, w) \xrightarrow{*} f_{s'}(u, v) \to v$$

Nach Lemma gilt:

$$\vdash s_0 w \overset{*}{\longmapsto} us'v \quad \text{g.d.w.} \quad f_{s_0}(\vdash, w) \xrightarrow{*} f_{s'}(u, v),$$

so dass spec(TM) ebenfalls f berechnet.

spec(TM)

opns: $\hat{f} : A^* \to A^*$, $f_s : A'^* \times A'^* \to A^*$ $(s \in S)$

vars: $u, v \in A'^*$, $c \in A$, $x, w \in A^*$

equs:
$$\hat{f}(w) = f_{s_0}(\lambda, w)$$

$$f_s(u, av) = f_{s'}(u, bv) \quad \text{mit } (s', b, n) \in \delta(s, a)$$

$$f_s(u, av) = f_{s'}(ub, v) \quad \text{mit } (s', b, r) \in \delta(s, a)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_s(uc, av) = f_{s'}(u, cbv) \\ f_s(\lambda, av) = f_{s'}(\lambda, \Box bv) \end{array}\right\} \text{mit } (s', b, l) \in \delta(s, a)$$

$$f_s(u, \lambda) = f_s(u, \Box)$$

$$f_{s'}(u, x) = x \quad \text{mit } s' \in F$$

Lemma

$\lambda s_0 w \overset{*}{\longmapsto} usv$ g.d.w. $f_{s_0}(\lambda, w) \xrightarrow{*} f_s(u,v)$ für alle $s \in S$ & $u, v, w \in (A \cup \{\square\})^*$.

Beweis (mit vollständiger Induktion über Länge der Berechnungen):

I.A. : $\lambda s_0 w \overset{0}{\longmapsto} usv$ g.d.w. $u = \lambda,\ s = s_0,\ v = w$ g.d.w. $f_{s_0}(\lambda, w) \xrightarrow{0} f_{s_0}(\lambda, w) = f_s(u,v)$

I.V. : $\lambda s_0 w \overset{n}{\longmapsto} usv$ g.d.w. $f_{s_0}(\lambda, w) \xrightarrow{n} f_s(u,v)$

I.S. : $\lambda s_0 w \overset{n+1}{\longmapsto} usv$ g.d.w. $\lambda s_0 w \overset{n}{\longmapsto} \bar{u}\bar{s}\bar{v} \longmapsto usv$ g.d.w.

nach I.V. und Definition von spec(TM):

$f_{s_0}(\lambda, w) \xrightarrow{n} f_{\bar{s}}(\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow f_s(u,v)$ g.d.w. $f_{s_0}(\lambda, w) \xrightarrow{n+1} f_s(u,v)$