

wesentliche Elemente zur Ermittlung des Aufwands von Algorithmen

- ▶ Modellierung von Algorithmen
- ▶ einschließlich ihrer Berechnung (Ausführung)
- ▶ quantitative Erfassung als Zahl
der Berechnungsschritte
- ▶ Nachweisbarkeit dafür erforderlicher
Eigenschaften
- ▶ geeigneter Ansatz: **CE-S**

dragon curve

ops: $dc : \mathbb{N} \rightarrow \text{COMPASS}^*$

$tb : \text{COMPASS}^* \rightarrow \text{COMPASS}^*$

vars: $n \in \mathbb{N}, u \in \text{COMPASS}^*$

eqns: $dc(0) = N$

$dc(n+1) = dc(n)tb(dc(n))$

$tb(1) = 1$

$tb(xu) = tb(u)\bar{x} \quad (x \in \{N, O, S, W\})$

$(\bar{N} = W, \bar{W} = S, \bar{S} = O, \bar{O} = N)$

CE-S (conditional equations on strings)

- ▶ Algorithmenmodellierungssprache
- ▶ Algorithmen als Operationen mit Argument- und Wertebereichen
- ▶ Modellierung (Spezifikation, Definition) durch bedingte Gleichungen
- ▶ Syntaxschema:

spec

ops: $decl_1, \dots, decl_n$

vars: $tv_1, \dots, tv_k$

eqns: $ce_1, \dots, ce_m$

Name

Operationsdeklaration

Variablendeklaration

Gleichungen

CE-S-Konstrukte

▸ Operationsdeklaration

$f : D_1 \times \dots \times D_k \rightarrow D$
Name Argumenttyp Werttyp

▸ einschließlich Konstante

$c : D$

▸ Variablendeklaration

$x \in D$
Name Typ

▸ Datentypen $A, A^*, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \text{BOOL}$

▸ (bedingte) Gleichung

$L = R$ (falls $b \mid \neg b$)
Terme Boolescher Term
alternativ

Terme

- ▷ sei $DECL$ Menge von Operationsdeklarationen und X Menge von Variablendeklarationen
- ▷ Menge T_D aller Terme des Typs D rekursiv definiert:
 - $(c: \rightarrow D) \in DECL$ impliziert $c \in T_D$
 - $(x \in D) \in X$ impliziert $x \in T_D$
 - $(f: D_1 \times \dots \times D_k \rightarrow D) \in DECL$ und $t_i \in T_{D_i}$ für $i=1, \dots, k$ impliziert $f(t_1, \dots, t_n) \in T_D$

Wertzuweisung und Substitution

▷ Variablen sind Platzhalter für Terme desselben Typs

▷ Wertzuweisung: $a(x) \in T_D$ für alle $(x \in D) \in X$

▷ Substitution (von x durch $a(x)$ in Term):

$$(i) \quad c[a] = c \quad \text{für} \quad (c: \rightarrow D) \in DECL$$

$$(ii) \quad x[a] = a(x) \quad \text{für} \quad (x \in D) \in X$$

$$(iii) \quad (f(t_1, \dots, t_k))[a] = f(t_1[a], \dots, t_k[a]) \quad \text{für} \\ (f: D_1 \times \dots \times D_k \rightarrow D) \in DECL; \quad t_i \in T_{D_i}, i=1, \dots, k$$

Berechnung (Auswertung, Ausführung)

▷ schrittweise durch Gleichungsanwendung

$$\begin{aligned} \text{z.B. } dc(2) &= dc(1)tb(dc(1)) \\ &\stackrel{A}{=} dc(1)tb(dc(0)tb(dc(0))) \\ &\stackrel{B}{=} dc(1)tb(Ntb(dc(0))) \\ &\stackrel{C}{=} dc(1)tb(tb(dc(0))) \\ &\stackrel{D}{=} dc(1)tb(tb(tb(dc(0)))) \end{aligned}$$

- A : $n := 1$ in Gleichung 2
- B : $n := 0$ in Gleichung 2 in Argumentterm
- C : Gleichung 1 in Argumentterm
- D : $u := tb(dc(0))$ in Gl. 4 in Argumentterm

Berechnungsschritt (Auswertungsschritt)

▷ als Gleichungsanwendung auf Terme: $t \rightarrow t'$

(1) Gleichung $L = R$ mit Substitution bzgl. a :

$$L[a] \rightarrow R[a]$$

(2) dasselbe im Argumentterm:*)

$$f(t_1, \dots, t_k) \rightarrow f(t_1, \dots, t_{i-1}, t'_i, t_{i+1}, \dots, t_k)$$

falls $t_i \rightarrow t'_i$

*) wegen Rekursion in (2) kann direkte Gleichungsanwendung gemäß (1) beliebig weit innen im Term stattfinden

Berechnung und Gleichwertigkeit

- ▷ Berechnung als Schrittfolge

$$t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \dots \rightarrow t_n = t' \quad (n=0: t=t')$$

dafür kurz: $t \xrightarrow{*} t'$

- ▷ Gleichwertigkeit wie Berechnung mit Rückwärtsschritt ($R=L$ statt $L=R$)

$$t \leftrightarrow t' \text{ falls } t \rightarrow t' \text{ oder } t \leftarrow t'$$

$\xleftrightarrow{*}$ analog $\xrightarrow{*}$

- ▷ für $t \xleftrightarrow{*} t'$ auch $t = t'$

$$\text{beachte: } \rightarrow \subseteq \xrightarrow{*} \subseteq \leftrightarrow \subseteq \supseteq$$

Fallunterscheidung

- ▷ if-then-else- als Abkürzung für 2 bedingte Gleichungen:

$$t = \text{if } b \text{ then } t_1 \text{ else } t_2 \text{ kurz für } \begin{cases} t = t_1 & \text{falls } b \\ t = t_2 & \text{falls } \neg b \end{cases}$$

- ▷ Berechnungsschritte wie bei Gleichungen, aber bedingt:

$$t[a] \rightarrow t_1[a] \quad \text{falls } b[a] = T$$

$$t[a] \rightarrow t_2[a] \quad \text{falls } b[a] = F$$

↙ gleichwertig

CE-S-Datentypen

▷ Wahrheitswerte **BOOL**

mit $T, F: \rightarrow \text{BOOL}$; $\neg: \text{BOOL} \rightarrow \text{BOOL}$; $\wedge, \vee, \dots: \text{BOOL}^2 \rightarrow \text{BOOL}$

▷ natürliche und ganze Zahlen **N, Z**

mit üblichen arithmet. Operationen & Vergleichen

▷ Alphabete **A, B, ...**

mit Elem. $a: \rightarrow A, \dots$ & Gleichheit $\equiv: A \times A \rightarrow \text{BOOL}$

▷ Wörter $A^*, B^*, \dots, N^*, \dots, (A^*)^*, \dots$

mit $\perp$, Konkatination, **length**, **cont**, $\equiv, \dots$