

Lehr- & Lernziel

- ▶ Ermittlung des Zeitaufwands bei der Auswertung von Operationen* auf Zeichenketten

Hilfsmittel : CE-S

- Algorithmenmodellierung durch bedingte Gleichungen mit Auswertungsschritten und Beweistechnik

*) synonym für Algorithmen

CE-S (conditional equations on strings)

- ▶ Algorithmenmodellierungssprache
- ▶ Algorithmen als Operationen mit Argument- und Wertebereichen
- ▶ Modellierung (Spezifikation, Definition) durch bedingte Gleichungen
- ▶ Syntaxschema:

spec

ops: $decl_1, \dots, decl_n$

vars: $tv_1, \dots, tv_k$

eqns: $ce_1, \dots, ce_m$

Name

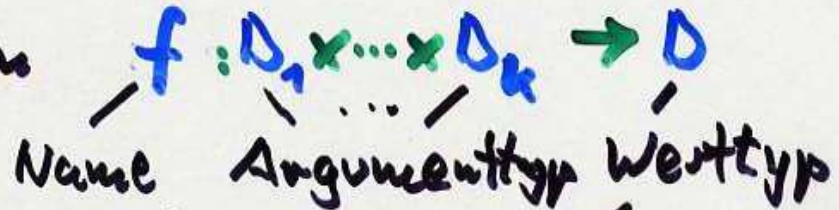
Operationsdeklaration

Variablendeklaration

Gleichungen

CE-S-Konstrukte

▷ Operationsdeklaration



▷ einschließlich Konstante

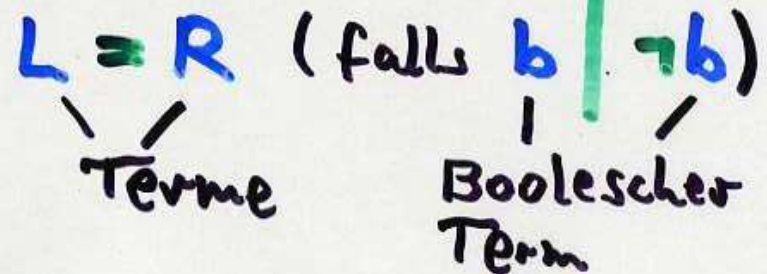


▷ Variablendeklaration



▷ Datentypen $A, A^*, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \text{BOOL}$

▷ (bedingte) Gleichung



Terme

- ▷ sei $DECL$ Menge von Operationsdeklarationen und X Menge von Variablendeklarationen
- ▷ Menge T_D aller Terme des Typs D rekursiv definiert:
 - $(c: \rightarrow D) \in DECL$ impliziert $c \in T_D$
 - $(x \in D) \in X$ impliziert $x \in T_D$
 - $(f: D_1 \times \dots \times D_k \rightarrow D) \in DECL$ und $t_i \in T_{D_i}$ für $i=1, \dots, k$ impliziert $f(t_1, \dots, t_k) \in T_D$

CE-S-Datentypen

- ▷ Wahrheitswerte **BOOL**
mit $T, F: \rightarrow \text{BOOL}$; $\neg: \text{BOOL} \rightarrow \text{BOOL}$; $\wedge, \vee, \dots: \text{BOOL}^2 \rightarrow \text{BOOL}$
- ▷ natürliche und ganze Zahlen **N, Z**
mit üblichen arithmet. Operationen & Vergleichen
- ▷ Alphabete **A, B, ...**
mit Elem. $a: \rightarrow A, \dots$ & Gleichheit $\equiv: A \times A \rightarrow \text{BOOL}$
- ▷ Wörter **$A^*, B^*, \dots, N^*, \dots, (A^*)^*, \dots$**
mit $\perp$, Konkatenation, **length, count, $\equiv, \dots$**

Auswertungsschritt (Gleichungsanwendung)

- (1) Zuweisung aktueller Werte $a(x) \in T_D$
an die Variablen $x \in D$ und Substitution
in Gleichung $L = R$:

$$L[a] \rightarrow R[a]$$

- (2) dasselbe, aber in Argumenttermen:

$$\text{op}(t_1, \dots, t_k) \rightarrow \text{op}(t_1, \dots, t_{i-1}, t'_i, t_{i+1}, \dots, t_k)$$

$$\text{falls } t_i \rightarrow t'_i$$

Wertzuweisung und Substitution

▷ Variablen sind Platzhalter für Terme desselben Typs

▷ Wertzuweisung: $a(x) \in T_D$ für alle $(x \in D) \in X$

▷ Substitution (von x durch $a(x)$ in Term):

$$(i) \quad c[a] = c \quad \text{für} \quad (c: \rightarrow D) \in DECL$$

$$(ii) \quad x[a] = a(x) \quad \text{für} \quad (x \in D) \in X$$

$$(iii) \quad (f(t_1, \dots, t_k))[a] = f(t_1[a], \dots, t_k[a]) \quad \text{für} \\ (f: D_1 \times \dots \times D_k \rightarrow D) \in DECL; \quad t_i \in T_{D_i}, i=1, \dots, k$$

Berechnung und Gleichwertigkeit

- ▷ Berechnung als Schrittfolge

$$t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \dots \rightarrow t_n = t' \quad (n=0: t=t')$$

dafür kurz: $t \xrightarrow{*} t'$

- ▷ Gleichwertigkeit wie Berechnung mit Rückwärtsschritt ($R=L$ statt $L=R$)

$$t \leftrightarrow t' \text{ falls } t \rightarrow t' \text{ oder } t \leftarrow t'$$

$\xleftrightarrow{*}$ analog $\xrightarrow{*}$

- ▷ für $t \xleftrightarrow{*} t'$ auch $t = t'$

$$\text{beachte: } \rightarrow \subseteq \xrightarrow{*} \subseteq \xleftrightarrow{*} \subseteq \leftrightarrow$$

Auswertungsschritt (Gleichungsanwendung)

- (1) Zuweisung aktueller Werte $a(x) \in T_D$ an die Variablen $x \in D$ und Substitution in Gleichung $L = R$ falls b :

$$L[a] \rightarrow R[a] \text{ falls } b(a) = T$$

- (2) dasselbe, aber in Argumenttermen:

$$\text{op}(t_1, \dots, t_k) \rightarrow \text{op}(t_1, \dots, t_{i-1}, t'_i, t_{i+1}, \dots, t_k) \\ \text{falls } t_i \rightarrow t'_i$$

Fallunterscheidung

- ▷ if-then-else- als Abkürzung für 2 bedingte Gleichungen:

$$t = \text{if } b \text{ then } t_1 \text{ else } t_2 \text{ kurz für } \begin{cases} t = t_1 & \text{falls } b \\ t = t_2 & \text{falls } \neg b \end{cases}$$

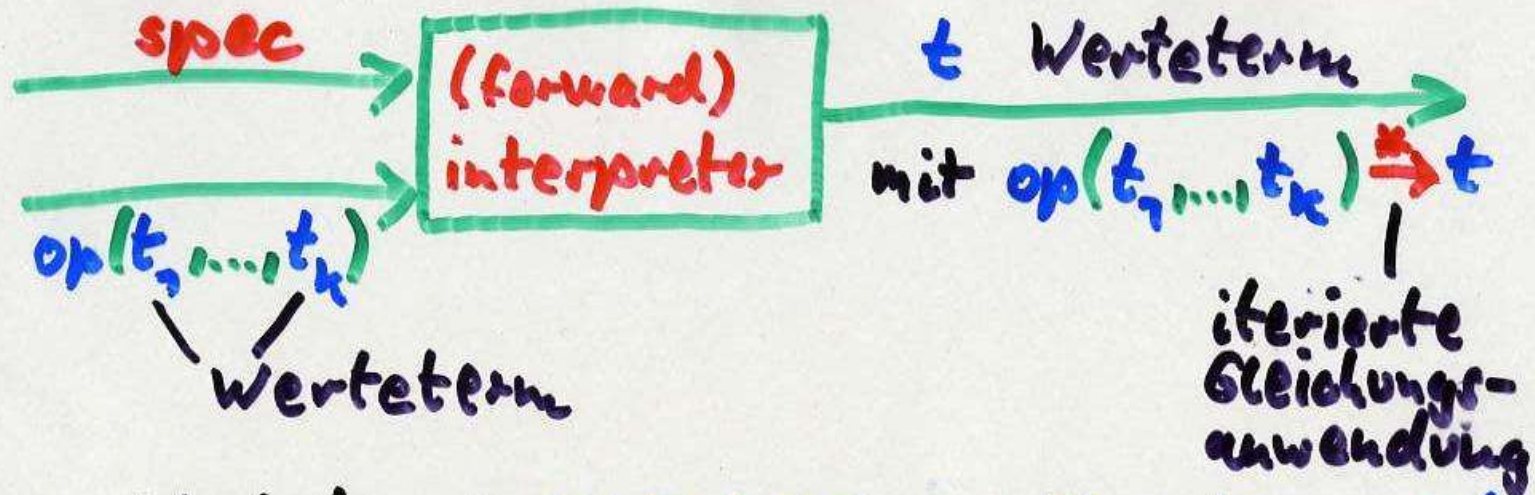
- ▷ Berechnungsschritte wie bei Gleichungen, aber bedingt:

$$t[a] \rightarrow t_1[a] \quad \text{falls } b[a] = T$$

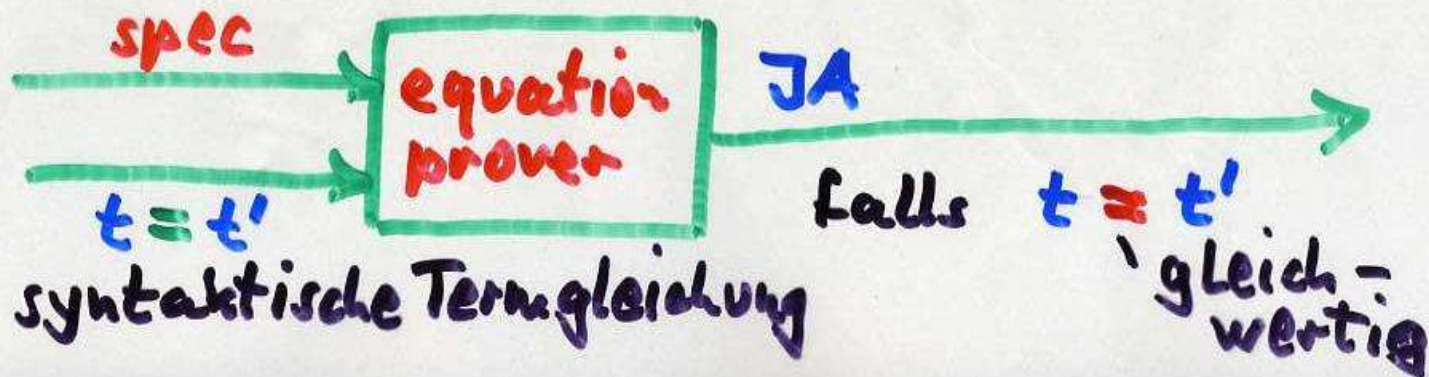
$$t[a] \rightarrow t_2[a] \quad \text{falls } b[a] = F$$

↙ gleichwertig

(Vorwärts-)Interpreter & Theorembeweiser



- Werteterme: $T, F; 0, 1, 2, \dots \in \mathbb{N}; a, b, c, \dots \in A;$
 $L, a_1 \dots a_n \in A^* \text{ f\"ur } a_i \in A, n \geq 1$



Variante Folie 6

Berechnungsschritt (Auswertungsschritt)

▷ als Gleichungsanwendung auf Terme: $t \rightarrow t'$

(1) Gleichung $L = R$ mit Substitution bzgl. a :

$$L[a] \rightarrow R[a]$$

(2) dasselbe im Argumentterm:*)

$$f(t_1, \dots, t_n) \rightarrow f(t_1, \dots, t_{i-1}, t'_i, t_{i+1}, \dots, t_n)$$

falls $t_i \rightarrow t'_i$

*) wegen Rekursion in (2) kann direkte Gleichungsanwendung gemäß (1) beliebig weit innen im Term stattfinden