Lehr- & Lernziel

- Ermittlung des Zeitaufwands bei der Auswertung von Operationen*) auf Zeichenketten

Hilfsmittel : CE-S

- Algorithmenmodellierung durch bedingte Gleichungen mit Auswertungsschritten und Beweistechnik

-----

*) synonym für Algorithmen

CE-S (conditional equations on strings)

- Algorithmenmodellierungssprache
- Algorithmen als Operationen mit Argument- und Wertebereichen
- Modellierung (Spezifikation, Definition) durch bedingte Gleichungen
- Syntaxschema:

spec	Name
opns: $decl_1, \ldots, decl_k$	Operationsdeklaration
vars: $tv_1, \ldots, tv_l$	Variablendeklaration
eqns: $ce_1, \ldots, ce_m$	Gleichungen

CE-S-Konstrukte

- Operationsdeklaration $\underbrace{f}_{\text{Name}} : \underbrace{D_1 \times \cdots \times D_k}_{\text{Argumenttyp}} \to \underbrace{D}_{\text{Werttyp}}$
- einschließlich Konstante $c: \to D$
- Variablendeklaration $\underbrace{x}_{\text{Name}} \in \underbrace{D}_{\text{Typ}}$
- Datentypen $A, A^*, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, BOOL$
- (bedingte) Gleichung $\underbrace{L = R}_{\text{Terme}}$ (falls $\underbrace{b \overset{\text{alternativ}}{|} \neg b}_{\text{Boolescher Term}}$)

Terme

- sei DECL Menge von Operationsdeklarationen und X Menge von Variablendeklarationen

- Menge T_D aller Terme des Typs D rekursiv definiert:

  $(c: \to D) \in DECL$ implizierts $c \in T_D$

  $(x \in D) \in X$ impliziert $x \in T_D$

  $(f: D_1 \times \cdots \times D_k \to D) \in DECL$ und t_i T_{D_i} für $i = 1, \ldots, k$

  impliziert $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_D$

CE-S-Datentypen

- Wahrheitswerte BOOL
  mit $T, F: \to BOOL$; $\neg : BOOL \to BOOL$; $\wedge, \vee, \ldots : BOOL^2 \to BOOL$
- natürliche und ganze Zahlen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$
  mit üblichen arithmet. Operationen & Vergleichen
- Alphabete $A, B, \ldots$
  mit Elem. $a : \to A, \ldots$ & Gleichheit $\equiv : A \times A \to BOOL$
- Wörter $A^*, B^*, \ldots \quad \ldots, \mathbb{N}^*, \ldots (A^*)^*, \ldots$
  mit ε, Konkatenation, length, count, $\equiv$, ...

Auswertungsschritt (Gleichungsanwendung)

(1) Zuweisung aktueller Werte $a(x) \in T_D$ an die Variablen $x \in D$ und Substitution in Gleichung $L = R$:

$$L[a] \rightarrow R[a]$$

(2) dasselbe, aber in Argumentterm :

$$op(t_1, \ldots, t_k) \rightarrow op(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i', t_{i+1}, \ldots, t_k)$$

falls $t_i \rightarrow t_i'$

Wertzuweisung und Substitution

- Variablen sind Platzhalter für Terme desselben Typs
- Wertzuweisung: $a(x) \in T_D$ für alle $(x \in D) \in X$
- Substitution (von x durch $a(x)$ in Term):

  (i) $c[a] = c$ für $(c : \to D) \in DECL$

  (ii) $x[a] = a(x)$ für $(x \in D) \in X$

  (iii) $(f(t_1, \dots, t_k)[a] = f(t_1[a], \dots, t_k[a])$ für

  $(f : D_1 \times \cdots \times D_k \to D) \in DECL$; $t_i \in T_{D_i}, i = 1, \dots, k$

Berechnung und Gleichwertigkeit

- Berechnung als Schrittfolge

  $t \equiv t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \cdots \rightarrow t_n \equiv t'$ $(n = 0:\ t \equiv t')$

  dafür kurz: $t \xrightarrow{*} t'$

- Gleichwertigkeit wie Berechnung mit Rückwärtsschritt ($R = L$ statt $L = R$)

  $t \leftrightarrow t'$ falls $t \rightarrow t'$ oder $t \leftarrow t'$

  $\xleftrightarrow{*}$ analog $\xrightarrow{*}$

- für $t \xleftrightarrow{*} t'$ auch $t = t'$

  beachte: $\rightarrow\ \subseteq\ \xrightarrow{*}\ \subseteq\ \xleftrightarrow{*}\ \supseteq\ \leftrightarrow$

Auswertungsschritt (Gleichungsanwendung)

(1) Zuweisung aktueller Werte $a(x) \in T_D$ an die Variablen $x \in D$ und Substitution in Gleichung $L = R$ falls b:

$$L[a] \to R[a] \quad \text{falls } b(a) = T$$

(2) dasselbe, aber in Argumentterm:

$$op(t_1, \ldots, t_k) \to op(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i', t_{i+1}, \ldots, t_k)$$

falls $t_i \to t_i'$

Fallunterscheidung

- if-then-else- als Abkürzung für 2 bedingte Gleichungen:

$$t = \text{if } b \text{ then } t_1 \text{ else } t_2 \quad \text{kurz für} \quad \begin{cases} t = t_1 & \text{falls } b \\ t = t_2 & \text{falls } \neg b \end{cases}$$

- Berechnungsschritte wie bei Gleichungen, aber bedingt:

$$t[a] \rightarrow t_1[a] \quad \text{falls} \quad b[a] = T$$
$$t[a] \rightarrow t_2[a] \quad \text{falls} \quad b[a] = F$$

gleichwertig

(Vorwärts-) Interpreter & Theorembeweiser

spec

$op(t_1, \dots, t_k)$ → **(forward) interpreter** → t Werteterm

$t_1, \dots, t_k$: Werteterm

mit $op(t_1, \dots, t_k) \overset{*}{\Rightarrow} t$

$\overset{*}{\Rightarrow}$: iterierte Gleichungsanwendung

- Werteterme: $T, F; 0, 1, 2, \dots \in \mathbb{N}; a, b, c, \dots \in A;$
  $\varepsilon, a_1 \cdots a_n \in A^*$ für $a_i \in A$, $n \geq 1$

spec

$t = t'$ → **equation prover** → JA

$t = t'$: syntaktische Termgleichung

falls $t \equiv t'$

$\equiv$: gleichwertig

Variante Folie 6

Berechnungsschritt (Auswertungsschritt)

▷ als Gleichungsanwendung auf Terme: $t \to t'$

(1) Gleichung $L = R$ mit Substitution bzgl. a:

$$L[a] \to R[a]$$

(2) dasselbe im Argumentterm:*)

$$f(t_1, \ldots, t_k) \to f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i', t_{i+1}, \ldots, t_k)$$

falls $t_i \to t_i'$

*) wegen Rekursion in (2) kann direkte Gleichungsanwendung gemäß (1) beliebig weit innen im Term stattfinden