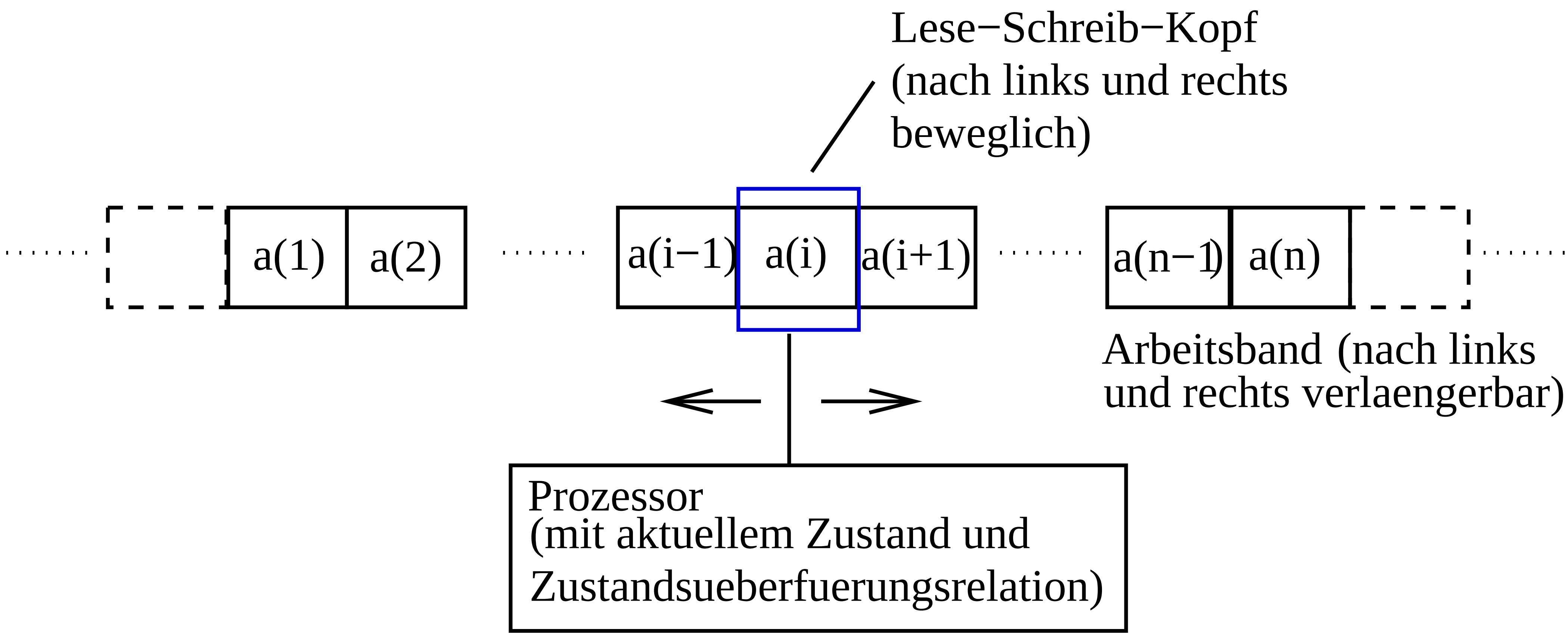
Turingmaschinen

- Von Alan Turing in den 30er Jahren dieses Jahrhunderts eingeführt
- Eines der ältesten Berechenbarkeitsmodelle
  Idee: den mechanischen Anteil des Rechnens mit Bleistift und Radiergummi auf Papier formal fassen.
- Grundlage für zahlreiche Beweise in der Berechenbarkeits- und Komplexitätstheorie

Bestandteile

- Prozessor (mit aktuellem Zustand und Zustandsüberführungrelation)
- Arbeitsband (nach links und rechts verlängerbar)
- Leseschreibkopf (nach links und rechts beweglich)

Graphische Veranschaulichung

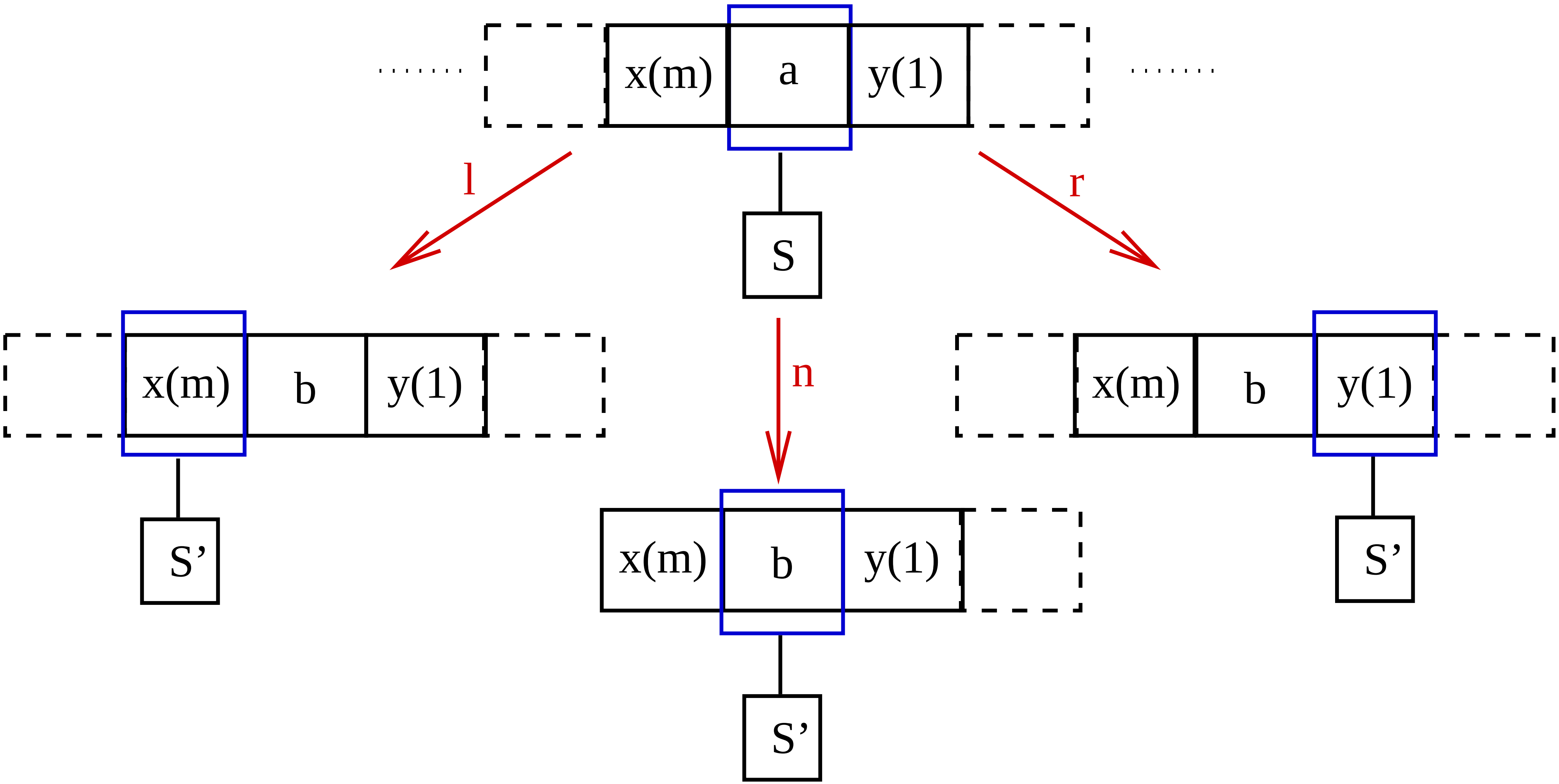


Arbeitsweise

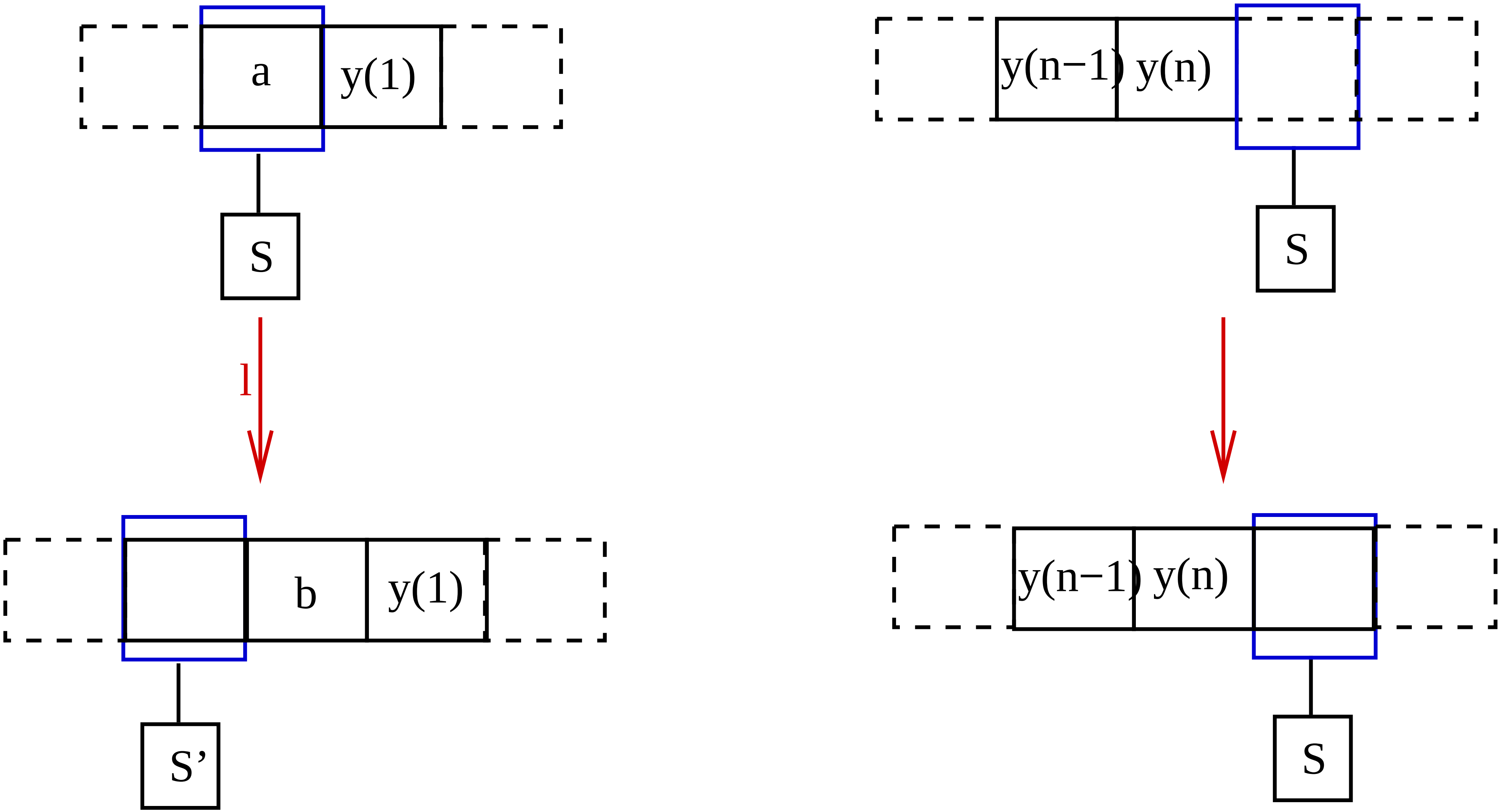
Lesen von a im aktuellen Zustand s bewirkt

- Schreiben von b,
- neuen Zustand s' und
- Kopfbewegung laut Zustandsüberführung.

Graphische Veranschaulichung (1)



Graphische Veranschaulichung (2)



Turingmaschine: Formale Definition

$TM = (S, I, A, d, s_0, F)$ mit

- S: endliche Menge von Zuständen,
- I: endliches Eingabealphabet,
- A: endliches Bandalphabet mit $I \subseteq A$ und $\Box \in A \setminus I$, ($\Box$ steht für leeres Feld.)
- d: Zustandsüberführungsrelation mit $d(s, a) \subseteq S \times A \times \{l, r, n\}$ für alle $s \in S$, $a \in A$,
- $s_0 \in S$: Anfangszustand,
- $F \subseteq S$: Menge von Endzuständen.

Konfigurationen

Konfiguration: usv mit $s \in S$, $u, v \in A^*$

Anfangskonfiguration: $\lambda s_0 w$ mit $w \in I^*$

Folgekonfiguration

Folgekonfiguration

Für alle $s, s' \in S$, $u, v \in A^*$ und $a, b, c \in A$:

$$
\begin{array}{ll}
usav \vdash us'bv\ , & \text{falls } (s', b, n) \in d(s,a) \\
usacv \vdash ubs'cv\ , & \text{falls } (s', b, r) \in d(s,a) \\
\left.\begin{array}{l} ucsav \vdash us'cbv \\ \lambda sav \vdash s'\Box bv \end{array}\right\}, & \text{falls } (s', b, l) \in d(s,a) \\
us\lambda \vdash us\Box &
\end{array}
$$

Konfigurationsfolge

$$\boxed{con = con_0 \vdash con_1 \vdash \cdots \vdash con_n = con'}$$

Dafür kurz: $con \vdash^{n} con'$ oder $con \vdash^{*} con'$

Erkannte Sprache

Sei $TM = (S, I, A, d, s_0, F)$ eine Turingmaschine.
Dann ist $L(TM)$ die von TM erkannte Sprache mit

$$L(TM) = \{w \in I^* \mid s_0 w \overset{*}{\vdash} usv, s \in F\}$$

Turing-berechenbare Funktion

Eine (partielle) Funktion $f\colon I^* \to I^*$ wird von einer Turingmaschine TM berechnet, falls für alle $v, w \in I^*$ gilt:

$$f(w) = v \quad \text{gdw.} \quad \lambda s_0 w \mathrel{\vdash\!\!\!\overset{*}{\text{---}}} usv\Box^i$$

für geeignete $u \in A^*, s \in F$ und $i \in \mathbb{N}$.

Schreibweise: $f = f_{TM}$