Such den Fehler...

Zusatzaufgabe zu Blatt 4 Von den beiden untenstehenden Beweisen entspricht der rechte der großen Mehrzahl der Lösungen, die zu Aufgabe 4 von Blatt 4 abgegeben wurden (nicht wortwörtlich, aber dem Sinn nach). Da diese Lösung falsch ist und eigentlich nur mit 0% bewerted werden könnte, hier eine Zusatzaufgabe, um die Scharte wieder auswetzen zu können: Finde in dem linken und in dem rechten Beweis die Fehler und beschreibe, worin sie bestehen. Natürlich sollte die Aufgabe wieder individuell gelöst werden. Abgabe bitte am Donnerstag, 18.12.97, im Tutorium. (25%)

P.S.: Es geht um die Beweise; die beiden Lemmata sind korrekt. In dem rechten solltet Ihr unschwer das Pumping-Lemma wiedererkennen.

Lemma Für jede Menge $M \subseteq \mathbb{N}$, die mindestens eine Primzahl enthält, gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so daß alle $m \in M$ mit $m \geq p$ sich schreiben lassen als $m = q + n$, wobei q eine Primzahl in M ist und $n \geq 2$.

Satz Die Menge $M = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 5\}$ enthält keine Primzahl.

Beweis durch Widerspruch

Nehme an, M enthält eine Primzahl. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so daß alle $m \in M$ mit $m \geq p$ sich schreiben lassen als $m = q + n$, wobei q eine Primzahl in M ist und $n \geq 2$.

Wähle $m = 6$ und $q = 5$. Dann ist $n = 1 < 2$, im Widerspruch zum Lemma. Daher muß die Annahme falsch gewesen sein, d.h. M enthält keine Primzahl. $\square$

Lemma Für jede Sprache L, die von einem EA erkannt wird, gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so daß alle $w \in L$ mit $|w| \geq p$ sich schreiben lassen als $w = w_1 w_2 w_3$, wobei $0 < |w_2| \leq p$ und $w_1 w_2^i w_3 \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Satz Die Sprache $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ wird von keinem EA erkannt.

Beweis durch Widerspruch

Nehme an, L wird von einem EA erkannt. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so daß alle $w \in L$ mit $|w| \geq p$ sich schreiben lassen als $w = w_1 w_2 w_3$, wobei $0 < |w_2| \leq p$ und $w_1 w_2^i w_3 \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Wähle $w = abbabb$ und $w_1 = ab$, $w_2 = ba$, $w_3 = bb$. Dann ist $w_1 w_2^0 w_3 = abbb \notin L$, im Widerspruch zum Lemma. Daher muß die Annahme falsch gewesen sein, d.h. L wird von keinem EA erkannt. $\square$