Netze

http://www.informatik.uni-bremen.de/theorie/teach/petri

Renate Klempien-Hinrichs

- Netze
- Netzmorphismen

Netze

Ein Tripel $N = (S, T, F)$ heißt Netz, wenn gilt:

(1) S und T sind endliche nicht-leere disjunkte Mengen;

(2) $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$ ist eine binäre Relation mit $dom(F) \cup cod(F) = S \cup T$.

Die Elemente in $\left\{ \begin{array}{c} S \\ T \\ F \end{array} \right\}$ heißen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Stellen.} \\ \text{Transitionen.} \\ \text{Kanten.} \end{array} \right.$

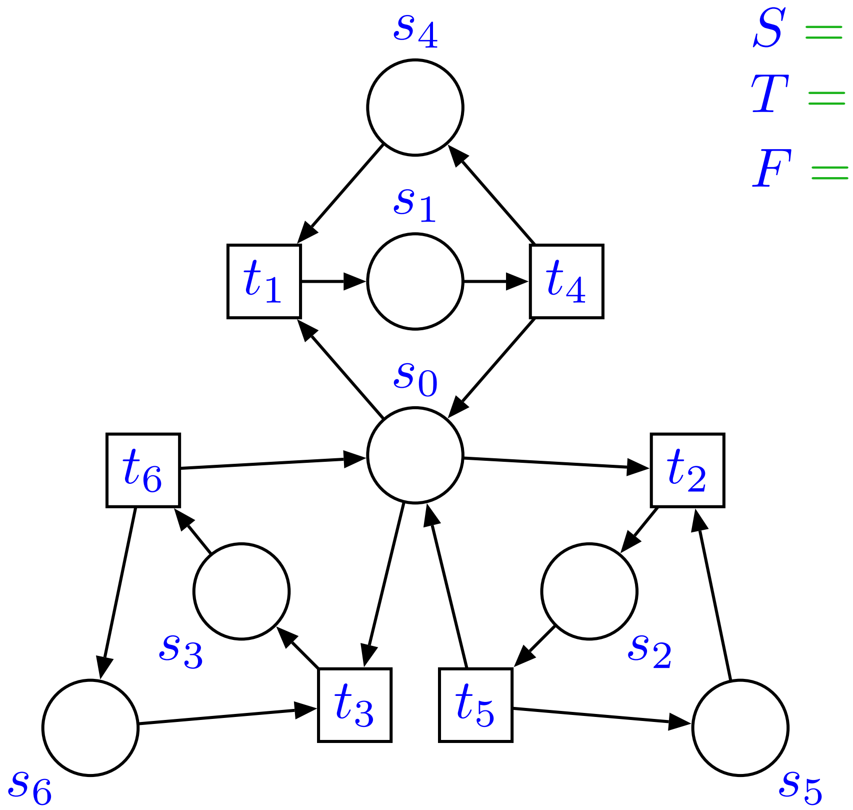
Notation: $X =_{\text{def}} S \cup T$

$dom(F) = \{x \in X \mid (x, y) \in F\}$ Domain von F

$cod(F) = \{y \in X \mid (x, y) \in F\}$ Codomain von F

Beispiel: Gemeinsame Ressourcen-Nutzung

3 ProgrammiererInnen, die sich Terminals teilen



Netz $N = (S, T, F)$:

$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$

$$F = \bigcup_{i=1,2,3} \{(s_0, t_i),\ (s_i, t_{3+i}),\ (s_{3+i}, t_i),\ (t_i, s_i),\ (t_{3+i}, s_0),\ (t_{3+i}, s_{3+i})\}$$

Netzmorphismen und Einbettungen

Seien $N_1 = (S_1, T_1, F_1)$ und $N_2 = (S_2, T_2, F_2)$ Netze.

(1) Eine Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ heißt Netzmorphismus $f\colon N_1 \to N_2$, wenn für alle $(x, y) \in F_1$ mit $f(x) \neq f(y)$ gilt:

(a) $(f(x), f(y)) \in F_2$ (Kanten bleiben erhalten);

(b) $x \in S_1$ gdw. $f(x) \in S_2$ (Knotenarten bleiben erhalten).

(2) Ein Netzmorphismus $f\colon N_1 \to N_2$ heißt Einbettung, wenn gilt:

(a) $f\colon X_1 \to X_2$ ist injektiv;

(b) $(f(x), f(y)) \in F_2$ impliziert $(x, y) \in F_1$ für alle $x, y \in X_1$ (f ist kanten-surjektiv auf $f(X_1)$).

N_1 heißt Restriktion von N_2, wenn es eine Einbettung $f\colon N_1 \to N_2$ gibt.

Verfeinerungen und Faltungen

(3) Ein Netzmorphismus $f\colon N_1 \longrightarrow N_2$ heißt Netzquotient, wenn gilt:

(a) für alle $x_2 \in X_2$ gibt es $x_1 \in X_1$ mit $x_2 = f(x_1)$ (F ist surjektiv);

(b) für alle $(x_2, y_2) \in F_2$ gibt es $(x_1, y_1) \in F_1$
mit $f(x_1) = x_2$ und $f(y_1) = y_2$ (f ist kanten-surjektiv).

(4) N_1 heißt Verfeinerung von N_2 und N_2 heißt Vergröberung von N_1, wenn es einen Netzquotienten $f\colon N_1 \longrightarrow N_2$ gibt.

(5) Ein Netzquotient $f\colon N_1 \longrightarrow N_2$ heißt Faltung, wenn gilt:

$$f(S_1) = S_2 \text{ und } f(T_1) = T_2.$$

N_1 heißt Entfaltung von N_2, wenn es eine Faltung $f\colon N_1 \longrightarrow N_2$ gibt.

Beobachtungen

(1) Die Komposition von Netzmorphismen ist ein Netzmorphismus, d.h. wenn $f\colon N_1 \longrightarrow N_2$ und $g\colon N_2 \longrightarrow N_3$ Netzmorphismen sind, dann ist $g \circ f\colon N_1 \longrightarrow N_3$ auch ein Netzmorphismus.

Analog für Einbettungen, Netzquotienten und Faltungen.

(2) Die Relation ist Verfeinerung von auf der Menge aller Netze ist eine Ordnungsrelation, d.h. es gilt:

(a) Reflexivität: Jedes Netz ist eine Verfeinerung von sich selbst.

(b) Antisymmetrie: Wenn N_1 eine Verfeinerung von N_2 ist und N_2 eine Verfeinerung von N_1, dann gilt $N_1 \cong N_2$ (gleich bis auf Benennung der Knoten).

(c) Transitivität: Wenn N_1 eine Verfeinerung von N_2 ist und N_2 eine Verfeinerung von N_3, dann ist N_1 eine Verfeinerung von N_3.