Überdeckbarkeit

http://www.informatik.uni-bremen.de/theorie/teach/petri

Renate Klempien-Hinrichs

- Überdeckungsgraph
- Überdeckung
- Überdeckbarkeitsproblem

ω-Markierung

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz. Eine Abbildung $M: S \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ heißt ω-Markierung.

($M(s) = \omega$ soll bedeuten, dass auf der Stelle $s \in S$ unbeschränkt viele Marken liegen können.)

Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \omega - n = \omega &= \omega + n \\ n \cdot \omega &= \omega \qquad \text{für } n \neq 0 \\ 0 \cdot \omega &= 0 \\ \omega &> n \end{aligned}$$

Konstruktion von Überdeckungsgraphen

```
PROCEDURE ÜG;
VAR V, W: Menge von ω-Markierungen;  E: Kantenmenge;
    Act: Transitionsmenge;  t: Transition;  M, M', M*: ω-Markierung;
    Vor: FUNCTION(ω-Markierung): ω-Markierung;
BEGIN W := {M_0};  Vor(M_0) := NIL;  V := ∅;  E := ∅;
    WHILE W ≠ ∅
    DO Wähle-M-aus-W;  W := W ∖ {M};  V := V ∪ {M};
        Act := {t | t⁻ ≤ M};
        FOR t ∈ Act
        DO M' := M + Δt;  M* := M;
            WHILE (M* ≠ NIL) AND NOT (M* ≤ M')
            DO M* := Vor(M*);
            END;
            IF M* ≠ NIL THEN M' := M' + (M' − M*) · ω;
            END;
            E := E ∪ {[M, t, M']};
            IF M' ∉ V ∪ W THEN W := W ∪ {M'};  Vor(M') := M;
            END;
        END;
    END;
END ÜG;
```

Netzsprachen

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz.

(1) Die Menge $L(N) = \{q \in T^* \mid \exists M \in R_N(M_0) : M_0 \ [q> M\}$ heißt Schaltfolgensprache von N.

(2) Jeder bei M_0 beginnende Weg in einem Überdeckungsgraphen $\ddot{U}G(N)$ sei durch das Wort beschrieben, das von den Transitionen gebildet wird, mit denen die durchlaufenen Kanten beschriftet sind.

Die Menge aller derartigen Wörter sei

$$L_{\ddot{U}G}(N) = \{q \in T^* \mid \text{es existiert ein bei } M_0 \text{ beginnender Weg mit Beschriftung } q\}.$$

Für $q \in L_{\ddot{U}G}(N)$ bezeichne M_q den Knoten (d.h. die ω-Markierung) in $\ddot{U}G(N)$, zu dem der durch q beschriebene Weg führt.

Endlichkeit von Überdeckungsgraphen

Satz (Endlichkeit von Überdeckungsgraphen)

Für jedes S/T-Netz N ist jeder Überdeckungsgraph $\ddot{U}G(N)$ endlich.

Beobachtung (Endlicher Automat)

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz.

Dann lässt sich aus jedem Überdeckungsgraphen $\ddot{U}G(N) = (V_{\ddot{U}G}, E_{\ddot{U}G})$ von N ein endlicher Automat

$$A_{\ddot{U}G}(N) = (V_{\ddot{U}G}, T, d_{\ddot{U}G}, M_0, V_{\ddot{U}G})$$

mit

$$d_{\ddot{U}G}(M, t) = \{M' \mid [M, t, M'] \in E_{\ddot{U}G}\}$$

konstruieren, der die Sprache $L_{\ddot{U}G}(N)$ erkennt.

Überdeckung

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz und M, M' Markierungen von N.

- M heißt von M' überdeckt, wenn $M \leq M'$ ist.
- M heißt überdeckbar in N, wenn es eine in N erreichbare Markierung M' gibt, die M überdeckt.

Überdeckende Markierungen

Satz (Existenz von überdeckenden Knoten)

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz.

(1) Wenn $M_0\ [q\!>\ M$ in N gilt, dann ist $q \in L_{\ddot{U}G}(N)$ und $M \leq M_q$.

(2) Wenn M in N überdeckbar ist, dann existiert ein Knoten (d.h. eine ω-Markierung) in $\ddot{U}G(N)$, der M überdeckt.

Für eine ω-Markierung M bezeichnet $\Omega(M) = \{s \in S \mid M(s) = \omega\}$ die Menge der Stellen, an denen M gleich ω ist.

Satz (Unbeschränktheit der ω-markierten Stellen)

Zu jedem Knoten (d.h. jeder ω-Markierung) M^* in $\ddot{U}G(N)$ und jeder natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$ existiert eine in N erreichbare Markierung M, die auf der Menge $S \setminus \Omega(M^*)$ mit M^* übereinstimmt und an jeder Stelle in $\Omega(M^*)$ einen Wert größer als k hat.

Charakterisierungssätze

Satz (Charakterisierung)

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz. Dann gilt:

(1) Eine Markierung M ist überdeckbar in N gdw.

es gibt einen Knoten (d.h. eine ω-Markierung) M^* in $\ddot{U}G(N)$:

M^* überdeckt M.

(2) Eine Stelle $s \in S$ ist unbeschränkt in N gdw.

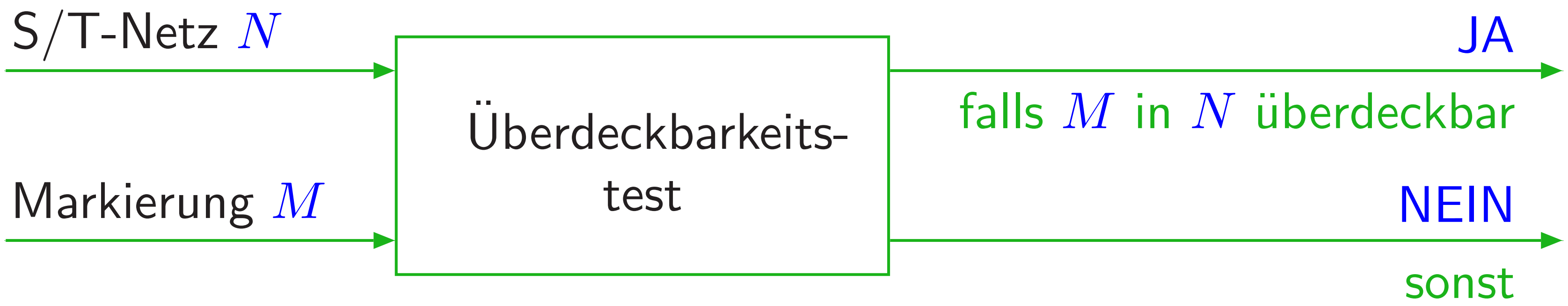
es gibt einen Knoten (d.h. eine ω-Markierung) M^* in $\ddot{U}G(N)$:

$M^*(s) = \omega$.

Überdeckbarkeitsproblem

Satz (Überdeckbarkeitsproblem)

Das Überdeckbarkeitsproblem für S/T-Netze ist entscheidbar.



Lösung des Überdeckbarkeitsproblems

Eingabe: S/T-Netz $N = (S, T, F, W, M_0)$, Markierung $M : S \to \mathbb{N}$.

Idee: Konstruktion eines Überdeckungsgraphen $\ddot{U}G(N)$ und Test, ob darin ein Knoten existiert, von dem M überdeckt ist.

Ausgabe:

JA, falls $\ddot{U}G(N)$ einen Knoten enthält, von dem M überdeckt ist.

NEIN sonst.

Termination: Überdeckungsgraphen $\ddot{U}G(N)$ sind endlich.

Korrektheit: ergibt sich aus der Charakterisierung der Überdeckbarkeit.