# Lebendigkeit

http://www.informatik.uni-bremen.de/theorie/teach/petri

Renate Klempien-Hinrichs

- Lebendigkeitsbegriffe
- Lebendigkeit und Reversibilität
- Entscheidungsprobleme
- Lebendigkeitstest für beschränkte S/T-Netze

# Lebendigkeit



Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz.

- Eine Markierung $M$ heißt tot (in $N$), wenn keine Transition $t \in T$ unter $M$ aktiviert ist.
- Eine Transition $t \in T$ heißt tot bei $M$ (in $N$), wenn von $M$ aus keine Markierung erreichbar ist, unter der $t$ aktiviert ist.
  (Ist $t$ tot bei $M_0$, so heißt $t$ tot in $N$.)
- Eine Transition $t \in T$ heißt lebendig bei $M$ (in $N$), wenn $t$ bei keiner von $M$ aus erreichbaren Markierung tot ist.
  (Ist $t$ lebendig bei $M_0$, so heißt $t$ lebendig in $N$.)
- Eine Markierung $M$ heißt lebendig (in $N$), wenn alle Transitionen $t \in T$ lebendig bei $M$ in $N$ sind.
- $N$ heißt lebendig, wenn $M_0$ lebendig in $N$ ist.
- $N$ heißt schwach-lebendig (oder verklemmungsfrei oder deadlockfrei), wenn in $N$ keine tote Markierung erreichbar ist.
- $N$ heißt tot, wenn alle Transitionen tot bei $M_0$ sind.

# Lebendigkeit kurzgefasst



Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz.

(1) $M$ tot (in $N$) gdw. $\forall t \in T : t$ nicht $M$-aktiviert.

(2) $t$ tot bei $M$ gdw. $\forall M' \in R_N(M) : t$ nicht $M'$-aktiviert.

(3) $t$ lebendig bei $M$ gdw. $\forall M' \in R_N(M)\ \exists M'' \in R_N(M') : t\ M''$-aktiviert.

(4) $M$ lebendig (in $N$) gdw. $\forall t \in T : t$ lebendig bei $M$.

(5) $N$ lebendig gdw. $\forall t \in T : t$ lebendig bei $M_0$.

(6) $N$ schwach-lebendig gdw. $\forall M \in R_N(M_0)\ \exists t \in T : t\ M$-aktiviert.

(7) $N$ tot gdw. $\forall t \in T : t$ tot bei $M_0$.

# Beziehungen zwischen Lebendigkeitsbegriffen



**Folgerungen** (Beziehungen)

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz.

(1) $N$ lebendig $\qquad$ $N$ schwach-lebendig.

(2) $t \in T$ lebendig bei $M$ in $N$
$\forall M' \in R_N(M)\ \exists M'' \in R_N(M') : t$ ist $M''$-aktiviert.

(3) $t \in T$ lebendig bei $M$ in $N$
$\forall M' \in R_N(M) : t$ lebendig bei $M'$ in $N$.

(4) $t \in T$ tot bei $M$ in $N$ $\qquad$ $\forall M' \in R_N(M) : t$ tot bei $M'$ in $N$.

(5) $t \in T$ tot bei $M$ in $N$ $\qquad$ $t$ nicht lebendig bei $M$ in $N$.

(6) $N$ nicht schwach-lebendig $\qquad$ $\forall t \in T : t$ nicht lebendig (bei $M_0$).

**Bemerkung** „tot“ ist nicht das Gegenteil von „lebendig“.

# Reversibilität



Ein S/T-Netz $N = (S, T, F, W, M_0)$ heißt reversibel, wenn für jede Markierung $M \in R_N(M_0)$ gilt: $M\ [*> M_0$.

**Folgerung**

$N$ ist reversibel gdw. $\forall M, M' \in R_N(M_0) : M\ [*> M'$.

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt stark zusammenhängend, wenn in $G$ von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten ein gerichteter Weg existiert.

**Folgerung**

$N$ ist reversibel gdw. der Erreichbarkeitsgraph $G(N)$ ist stark zusammenhängend.

**Satz**

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein reversibles S/T-Netz.

$t$ ist lebendig (bei $M_0$) gdw. $t$ ist nicht tot (bei $M_0$).

# Entscheidungsprobleme



**Satz**

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz, $M$ eine Markierung von $N$ und $t \in T$. Dann ist entscheidbar, ob $t$ tot bei $M$ ist.

**Satz** (Verklemmungsfreiheitsproblem)

(1) Das Verklemmungsfreiheitsproblem ist äquivalent zum Erreichbarkeitsproblem.

(2) Das Verklemmungsfreiheitsproblem ist entscheidbar.

**Satz** (Lebendigkeitsproblem)

(1) Das Lebendigkeitsproblem ist äquivalent zum Erreichbarkeitsproblem.

(2) Das Lebendigkeitsproblem ist entscheidbar.

# Lösung des Lebendigkeitsproblems für beschränkte S/T-Netze



**Eingabe:** S/T-Netz $N = (S, T, F, W, M_0)$.

**Idee:** Berechne iterativ für jede von $M_0$ erreichbare Markierung $M$ alle bei $M$ nicht toten Transitionen.

**Ausgabe:**

JA, falls bei jeder von $M_0$ erreichbaren Markierung alle Transitionen nicht tot sind.

NEIN, falls eine von $M_0$ erreichbare Markierung $M$ gefunden wird, bei der eine Transition tot ist.

**Termination:** ergibt sich aus der Endlichkeit von $R_N(M_0)$ und $T$.

**Korrektheit:** ergibt sich aus der Definition von Lebendigkeit.

# Lebendigkeitstest für beschränkte S/T-Netze (I)



PROCEDURE lebendig;
VAR $V$: Knotenmenge; $v, v'$: Knoten; $E$: Kantenmenge;
    $Live$: Transitionsmenge; $t, t'$: Transition;
    $nichttot$: FUNCTION(Knoten): Transitionsmenge;
    $ziel$: FUNCTION(Knoten,Transition): Knoten;
    $fertig$: BOOLEAN;
BEGIN $V := R_N(M_0)$;
    $E := \{[M, t, M'] \mid M, M' \in R_N(M_0),\ t \in T,\ M\ [t> M'\}$;
    FOR $v \in V$ DO $nichttot(v) := \{t \mid \exists v' \in V : [v, t, v'] \in E\}$;

$$ziel(v,t) := \begin{cases} v' & \text{falls } [v,t,v'] \in E \\ NIL & \text{sonst} \end{cases}$$

    END;
    REPEAT (siehe nächste Folie) UNTIL $fertig$;
    $Live := T$;  FOR $v \in V$ DO $Live := Live \cap nichttot(v)$ END;
    IF $Live = T$ THEN WriteString(„Das Netz ist lebendig.“)
        ELSE WriteString(„Das Netz ist nicht lebendig.“)
    END;
END lebendig;

# Lebendigkeitstest für beschränkte S/T-Netze (II)



REPEAT $\mathit{fertig} := \mathit{TRUE}$;
    FOR $v \in V$
    DO FOR $t \in T$
        DO IF $\mathit{ziel}(v,t) \neq \mathit{NIL}$
            THEN $v' := \mathit{ziel}(v,t)$;
                IF $\mathit{nichttot}(v') \not\subseteq \mathit{nichttot}(v)$
                THEN FOR $t' \in \mathit{nichttot}(v') \setminus \mathit{nichttot}(v)$
                    DO $\mathit{ziel}(v,t') := \mathit{ziel}(v',t')$
                    END;
                    $\mathit{nichttot}(v) := \mathit{nichttot}(v) \cup \mathit{nichttot}(v')$;
                    $\mathit{fertig} := \mathit{FALSE}$;
                END;
            END;
        END;
    END;
UNTIL $\mathit{fertig}$;