Vektor-Additions-Systeme und Invarianten

http://www.informatik.uni-bremen.de/theorie/teach/petri

Renate Klempien-Hinrichs

- Stellen- und Transitions-Vektoren
- T-Invarianten
- S-Invarianten
- Bezug zu erreichbaren Markierungen
- Strukturelle Beschränktheit

Schreibweisen

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz mit $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ als Stellenmenge und $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ als Transitionenmenge.

- Die Matrix von N wird geschrieben als

$$C = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le m,\\ 1 \le j \le n}} \text{ wobei } c_{ij} = \Delta t_j(s_i).$$

- Ein S-Vektor ist eine Abbildung $y\colon S \to \mathbb{Z}$, notiert als Zeilenvektor.
- Ein T-Vektor ist eine Abbildung $x\colon T \to \mathbb{Z}$, notiert als Spaltenvektor.
- Die Transponierte eines Vektors z wird bezeichnet mit $z^\top$.
- Die Transponierte einer Matrix C wird bezeichnet mit $C^\top$.
- $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ bezeichnet jeden Null-Vektor.
- Für $w \in T^*$ ist $\Delta w = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{falls } w = \lambda, \\ \Delta q + \Delta t & \text{falls } w = qt. \end{cases}$

Notwendige Bedingungen für Erreichbarkeit

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz. Für $q \in T^*$ heißt der T-Vektor $\bar{q}\colon T \to \mathbb{N}$, der jeder Transition $t \in T$ mit $\bar{q}(t) = count_t(q)$ die Anzahl der Vorkommen von t in q zuordnet, Parikh-Vektor von q.

Beobachtung (Erreichbarkeit)

Seien $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz und M, M' Markierungen von N.

(1) Wenn $M\ [q\!> M'$ für ein $q \in T^*$,

dann ist $M' = M + \Delta q$ und $\Delta q = \sum_{t \in T} \bar{q}(t) \cdot \Delta t = (C \cdot \bar{q})^\top$.

(2) Wenn $M\ [*\!> M'$, dann hat das lineare Gleichungssystem

$$C \cdot x = (M' - M)^\top$$

eine ganzzahlige Lösung x mit $x(t) \geq 0$ für alle $t \in T$.

Linear-algebraische Beschreibungen

Folgerung (Erreichbarkeit und Unbeschränktheit)

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz mit Matrix C.

(1) Für jeden S-Vektor $y \colon S \to \mathbb{Z}$ gilt:

Es gibt eine Markierung $M \colon S \to \mathbb{N}$ mit $M\ [*{>}\ M + y$

gdw.

das lineare Gleichungssystem $C \cdot x = y^\top$ besitzt eine ganzzahlige Lösung x mit $x(t) \geq 0$ für alle $t \in T$.

(2) Es gibt eine Anfangsmarkierung M'_0, so dass $N(M'_0)$ unbeschränkt ist

gdw.

das Ungleichungssystem $C \cdot x > \mathbf{0}$ besitzt eine ganzzahlige Lösung x mit $x(t) \geq 0$ für alle $t \in T$ und $x(t) > 0$ für ein $t \in T$.

T-Invarianten

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz mit Matrix C.

(1) Eine Abbildung $x\colon T \to \mathbb{Z}$ heißt T-Invariante von N, wenn $C \cdot x = \mathbf{0}$ ist.

(2) Eine T-Invariante x heißt echt,
wenn $x(t) \geq 0$ für alle $t \in T$ und $x(t) > 0$ für ein $t \in T$ gilt.

(3) Eine T-Invariante x heißt realisierbar in N,
wenn $q \in T^*$ und $M \in R_N(M_0)$ existieren mit $\bar{q} = x$ und $M\ [q\rangle\ M$.

(4) N heißt von T-Invarianten überdeckt,
wenn eine T-Invariante x existiert mit $x(t) > 0$ für alle $t \in T$.

Aussagen zu T-Invarianten

Folgerung (T-Invarianten)

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz.

(1) Die Menge aller T-Invarianten von N ist abgeschlossen gegenüber:

- Bildung von Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten und
- Division durch den größten gemeinsamen Teiler aller Komponenten.

(2) Der Null-Vektor $\mathbf{0}$ ist stets eine realisierbare T-Invariante.

Satz (Überdeckung durch T-Invarianten)

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz.

Wenn N bei einer (beliebigen) Markierung M lebendig und beschränkt ist, dann ist N von T-Invarianten überdeckt.

S-Invarianten

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz mit Matrix C.

(1) Eine Abbildung $y\colon S \to \mathbb{Z}$ heißt S-Invariante von N, wenn $y \cdot C = \mathbf{0}$ ist.

(2) Eine S-Invariante y heißt echt,
wenn $y(s) \geq 0$ für alle $s \in S$ und $y(s) > 0$ für ein $s \in S$ gilt.

(3) N heißt von S-Invarianten überdeckt,
wenn eine S-Invariante y existiert mit $y(s) > 0$ für alle $s \in S$.

(4) Für eine Abbildung $y\colon S \to \mathbb{Z}$ heißt $supp(y) = \{s \in S \mid y(s) > 0\}$ der Träger (support) von y.

(5) Eine echte S-Invariante heißt minimal, wenn es keine echte S-Invariante y' gibt mit $supp(y') \subsetneqq supp(y)$.

Berechnung minimaler echter S-Invarianten

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz mit Matrix C, $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ und $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$.

(1) Bilde aus C und der Einheitsmatrix I_m die Matrix D_0:

$$D_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & & 0 \\ C & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

(2) Berechne für $i = 1, \ldots, n$ aus D_{i-1} die Matrix D_i:

(a) Für alle Paare z_1, z_2 von Zeilen von D_{i-1} mit $z_1(i) \cdot z_2(i) < 0$ bilde $z = |z_2(i)| \cdot z_1 + |z_1(i)| \cdot z_2$, teile z durch den größten gemeinsamen Teiler aller Komponenten und hänge das Ergebnis an D_{i-1} an.

(b) Streiche alle Zeilen z mit $z(i) \neq 0$.

(3) Streiche in D_n die ersten n Spalten. Die restliche Matrix hat m Spalten. Ihre Zeilen bilden ein Erzeugendensystem für alle echten S-Invarianten von N.

S-Invarianten und erreichbare Markierungen

Satz (S-Invariante als konstantes gewichtetes Markenverhältnis)

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz und y eine S-Invariante von N.

Dann gilt: $\forall M \in R_N(M_0) : y \cdot M^\top = y \cdot M_0{}^\top$.

Folgerung (Nichterreichbarkeitstest)

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz und M eine Markierung von N.

Wenn eine S-Invariante y von N mit $y \cdot M^\top \neq y \cdot M_0{}^\top$ existiert, dann ist M in N nicht erreichbar.

Satz

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein lebendiges S/T-Netz und $y\colon S \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine Abbildung mit $y \cdot M^\top = y \cdot M_0{}^\top$ für alle $M \in R_N(M_0)$.

Dann ist y eine S-Invariante von N.

Strukturelle Beschränktheit

Ein S/T-Netz $N = (S, T, F, W, M_0)$ heißt strukturell beschränkt,
wenn N bei jeder Anfangsmarkierung beschränkt ist.

Satz (Beschränktheit)

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz.

(1) Wenn y eine echte S-Invariante mit $y(s_0) > 0$ ist,
dann ist die Stelle s_0 bei jeder Anfangsmarkierung beschränkt.

(2) Wenn N durch S-Invarianten überdeckt ist,
dann ist N strukturell beschränkt.

Satz (Strukturelle Beschränktheit)

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz mit lebendiger Markierung M.

N ist von S-Invarianten überdeckt gdw. N ist strukturell beschränkt.

Minimale echte S-Invarianten

Satz (Darstellung echter S-Invarianten)

Sei $N = (S, T, F, W, M_0)$ ein S/T-Netz.

Jede echte S-Invariante von N kann als Linearkombination von minimalen echten S-Invarianten (mit positiven rationalen Koeffizienten) dargestellt werden.

Folgerung (Lineare Abhängigkeit)

Minimale echte S-Invarianten mit gleichem Träger sind linear abhängig.