

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
 Vorlesung 3 vom 17.04.24
 Denotationale Semantik

Serge Autexier, Christoph Lüth

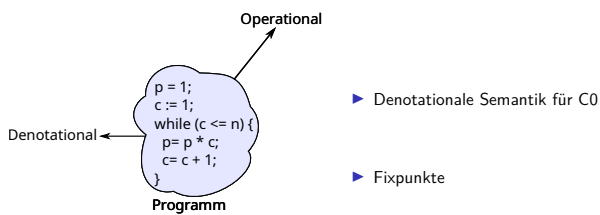
Universität Bremen

Sommersemester 2024

Fahrplan

- ▶ Einführung
- ▶ Operationale Semantik
- ▶ **Denotationale Semantik**
- ▶ Äquivalenz der Operationalen und Denotationalen Semantik
- ▶ Der Floyd-Hoare-Kalkül
- ▶ Invarianten im Floyd-Hoare-Kalkül
- ▶ Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls
- ▶ Strukturierte Datentypen
- ▶ Verifikationsbedingungen
- ▶ Vorwärts mit Floyd und Hoare
- ▶ Funktionen und Prozeduren I
- ▶ Funktionen und Prozeduren II
- ▶ Referenzen und Speichermodelle
- ▶ Ausblick und Rückblick

Überblick



Denotationale Semantik — Motivation

▶ **Operationale Semantik:**

Eine Menge von Regeln, die einen Zustand und ein Programm in einen neuen Zustand überführen:

$$\langle c, \sigma \rangle \rightarrow_{Stm} \sigma'$$

▶ **Denotationale Semantik:**

Eine Menge von Regeln, die ein Programm in eine **partielle Funktion** von Zustand nach Zustand überführen

$$\llbracket c \rrbracket_c : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

Denotationale Semantik — Kompositionalität

- ▶ Semantik von zusammengesetzten Ausdrücken durch Kombination der Semantiken der Teilausdrücke
- ▶ Bsp: Semantik einer Sequenz von Anweisungen durch Verknüpfung der Semantik der einzelnen Anweisungen
- ▶ Operationale Semantik ist **nicht** kompositional:
 - ▶ Semantik von Zeile (*) ergibt sich aus der Ableitung davor
 - ▶ Kann nicht unabhängig abgeleitet werden
- ▶ Denotationale Semantik ist kompositional.
 - ▶ Wesentlicher Baustein: **partielle Funktionen**

```
x := 3;
y = x + 7; // (*)
z = x + y;
```

Partielle Funktionen und ihre Graphen

- ▶ Der **Graph** einer partiellen Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist eine Relation

$$graph(f) \subseteq X \times Y \stackrel{def}{=} \{(x, f(x)) \mid x \in dom(f)\}$$

- ▶ Wir können eine partielle Funktion durch ihren Graph definieren:

Definition (Partielle Funktion)

Eine **partielle Funktion** $f : X \rightarrow Y$ ist eine Relation $f \subseteq X \times Y$ so dass wenn $(x, y_1) \in f$ und $(x, y_2) \in f$ dann $y_1 = y_2$ (**Rechtseindeutigkeit**)

- ▶ Wir benutzen beide Notationen, aber für die denotationale Semantik die Graph-Notation.
- ▶ **Systemzustände** sind partielle Abbildungen $\Sigma \stackrel{def}{=} Loc \rightarrow V$ (\rightarrow letzte VL)

Beispiel

Als Beispiel betrachten wir die partielle Funktion $div3 : \{0 \dots 10\} \rightarrow \mathbb{N}$

$$div3(x) = y \text{ g.d.w. } 3 \cdot y = x$$

- ▶ Zuordnung:

- 0 \mapsto 0
- 1
- 2
- 3 \mapsto 1
- 4
- 5
- 6 \mapsto 2
- 7
- 8
- 9 \mapsto 3
- 10

- ▶ Notation als Relation (**Graph**):

$$div3 \stackrel{def}{=} \{(0, 0), (3, 1), (6, 2), (9, 3)\}$$

- ▶ Wir schreiben

$$\begin{aligned} div3(3) &= 1 && \text{für } (3, 1) \in div3 \\ div3(5) &= \perp && \text{für es gibt kein } y \text{ mit } (5, y) \in div3 \\ div3(5) &= \perp && \text{für } \forall y. (5, y) \notin div3 \end{aligned}$$

- ▶ Achtung, Partialität!

Achtung, Partialität!

- ▶ Beim Rechnen mit partiellen Funktionen muss die **Definiertheit** beachtet werden.
- ▶ Insbesondere darf nicht mit undefinierten Ausdrücken gerechnet werden.
- ▶ Bspw. gilt oben **nicht** im allgemeinen:

$$3 \cdot div3(x) = x \quad \times$$

oder

$$div3(1) = \perp = div3(2) \implies div3(1) = div3(2) \quad \times$$

- ▶ Warum? Dann gälte

$$\begin{aligned} div3(1) &= div3(2) \\ 3 \cdot div3(1) &= 3 \cdot div3(2) \\ 1 &= 2 \quad \neq \end{aligned}$$

- ▶ Vgl. [https://de.wikipedia.org/wiki/Trugschluss_\(Mathematik\)#Division_durch_0](https://de.wikipedia.org/wiki/Trugschluss_(Mathematik)#Division_durch_0)

Arbeitsblatt 3.1: Relationen als Funktionen

Definiert wie im Beispiel eben die Funktion $\text{sqrt} : \{0, \dots, 100\} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$\text{sqrt}(x) = y \quad \text{g.d.w.} \quad y^2 = x$$

Was ist der Wert folgender Ausdrücke:

$$t_1 = 5 - \text{sqrt}(32) \quad t_2 = \text{sqrt}(49) + \text{sqrt}(0) \quad t_3 = \sqrt{3} \cdot \text{sqrt}(3) \quad t_4 = \frac{\text{sqrt}(64)}{0}$$

Denotierende Funktionen (Denotate)

- ▶ Arithmetische Ausdrücke: $a \in \mathbf{Aexp}$ denotieren eine partielle Funktion $\Sigma \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ Boolesche Ausdrücke: $b \in \mathbf{Bexp}$ denotieren eine partielle Funktion $\Sigma \rightarrow \mathbb{B}$
- ▶ Anweisungen: $c \in \mathbf{Stmt}$ denotieren eine partielle Funktion $\Sigma \rightarrow \Sigma$

Denotat von Aexp

$$\llbracket a \rrbracket_A : \mathbf{Aexp} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \mathbb{Z})$$

$$\llbracket n \rrbracket_A = \{(\sigma, \llbracket n \rrbracket) \mid \sigma \in \Sigma\}$$

$$\llbracket x \rrbracket_A = \{(\sigma, \sigma(x)) \mid \sigma \in \Sigma, x \in \text{Dom}(\sigma)\}$$

$$\llbracket a_0 + a_1 \rrbracket_A = \{(\sigma, n_0 + n_1) \mid (\sigma, n_0) \in \llbracket a_0 \rrbracket_A \wedge (\sigma, n_1) \in \llbracket a_1 \rrbracket_A\}$$

$$\llbracket a_0 - a_1 \rrbracket_A = \{(\sigma, n_0 - n_1) \mid (\sigma, n_0) \in \llbracket a_0 \rrbracket_A \wedge (\sigma, n_1) \in \llbracket a_1 \rrbracket_A\}$$

$$\llbracket a_0 * a_1 \rrbracket_A = \{(\sigma, n_0 \cdot n_1) \mid (\sigma, n_0) \in \llbracket a_0 \rrbracket_A \wedge (\sigma, n_1) \in \llbracket a_1 \rrbracket_A\}$$

$$\llbracket a_0 / a_1 \rrbracket_A = \{(\sigma, n_0 \div n_1) \mid (\sigma, n_0) \in \llbracket a_0 \rrbracket_A \wedge (\sigma, n_1) \in \llbracket a_1 \rrbracket_A \wedge n_1 \neq 0\}$$

Rechtseindeutigkeit

Lemma (Partielle Funktion)

$\llbracket - \rrbracket_A$ ist rechtseindeutig und damit eine **partielle Funktion**.

Beweis.

z.z.: wenn $(\sigma, v_1) \in \llbracket a \rrbracket_A, (\sigma, v_2) \in \llbracket a \rrbracket_A$ dann $v_1 = v_2$.

Strukturelle Induktion über **Aexp**:

- ▶ Induktionsbasis sind $n \in \mathbf{Z}$ und $x \in \mathbf{Idt}$.
Sei $a \equiv x$, dann $v_1 = \sigma(x) = v_2$.
- ▶ Induktionsschritt sind die anderen Klauseln.
Sei $a \equiv a_1 + a_2$.
Induktionsannahme ist: wenn $(\sigma, n_i) \in \llbracket a_i \rrbracket_A, (\sigma, m_i) \in \llbracket a_i \rrbracket_A$ dann $n_i = m_i$.
Sei $v_1 = n_1 + n_2$ mit $(\sigma, n_1) \in \llbracket a_1 \rrbracket_A, (\sigma, n_2) \in \llbracket a_2 \rrbracket_A$, und $v_2 = m_1 + m_2$ mit $(\sigma, m_1) \in \llbracket a_1 \rrbracket_A, (\sigma, m_2) \in \llbracket a_2 \rrbracket_A$.
Aus der Annahme folgt $n_1 = m_1$ und $n_2 = m_2$, deshalb $v_1 = v_2$.

Kompositionalität und Striktheit

- ▶ Die Rechtseindeutigkeit erlaubt die Notation als partielle Funktion:

$$\begin{aligned} \llbracket 3 * (x + y) \rrbracket_A(\sigma) &= \llbracket 3 \rrbracket_A(\sigma) \cdot (\llbracket x \rrbracket_A(\sigma) + \llbracket y \rrbracket_A(\sigma)) \\ &= 3 \cdot (\llbracket x \rrbracket_A(\sigma) + \llbracket y \rrbracket_A(\sigma)) \\ &= 3 \cdot (\sigma(x) + \sigma(y)) \end{aligned}$$

- ▶ Diese Notation versteckt die **Partialität**:

$$\llbracket 1 + x/0 \rrbracket_A(\sigma) = 1 + \sigma(x)/0 = 1 + \perp = \perp$$

- ▶ Wenn ein Teilausdruck undefiniert ist, wird der gesamte Ausdruck undefiniert: $\llbracket - \rrbracket_A$ ist **strikt** für alle arithmetischen Operatoren.

Arbeitsblatt 3.2: Semantik I

Hier üben wir noch einmal den Zusammenhang zwischen den beiden Notationen. Gegeben sei der Zustand $s = \langle x \mapsto 3, y \mapsto 4 \rangle$ und der Ausdruck $a = 7 * x + y$.

Berechnen Sie die Semantik zum einen als Relation (füllen Sie die Fragezeichen aus):

- $(s, ?) : \llbracket [7] \rrbracket$
- $(s, ?) : \llbracket [x] \rrbracket$
- $(s, ?) : \llbracket [7*x] \rrbracket$
- $(s, ?) : \llbracket [y] \rrbracket$
- $(s, ?) : \llbracket [7*x + y] \rrbracket$

Berechnen Sie zum anderen die Semantik in der Funktionsnotation:

$$\llbracket [7*x+y] \rrbracket(s) = \llbracket [7*x] \rrbracket(s) + \llbracket [y] \rrbracket(s) = \dots = ?$$

Ist das Ergebnis am Ende gleich?

Lösung

Denotat von Bexp

$$\llbracket a \rrbracket_B : \mathbf{Bexp} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \mathbb{B})$$

$$\llbracket \mathbf{1} \rrbracket_B = \{(\sigma, \text{true}) \mid \sigma \in \Sigma\}$$

$$\llbracket \mathbf{0} \rrbracket_B = \{(\sigma, \text{false}) \mid \sigma \in \Sigma\}$$

$$\begin{aligned} \llbracket a_0 == a_1 \rrbracket_B &= \{(\sigma, \text{true}) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n_0) \in \llbracket a_0 \rrbracket_A, (\sigma, n_1) \in \llbracket a_1 \rrbracket_A, n_0 = n_1\} \\ &\quad \cup \{(\sigma, \text{false}) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n_0) \in \llbracket a_0 \rrbracket_A, (\sigma, n_1) \in \llbracket a_1 \rrbracket_A, n_0 \neq n_1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \llbracket a_0 < a_1 \rrbracket_B &= \{(\sigma, \text{true}) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n_0) \in \llbracket a_0 \rrbracket_A, (\sigma, n_1) \in \llbracket a_1 \rrbracket_A, n_0 < n_1\} \\ &\quad \cup \{(\sigma, \text{false}) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n_0) \in \llbracket a_0 \rrbracket_A, (\sigma, n_1) \in \llbracket a_1 \rrbracket_A, n_0 \geq n_1\} \end{aligned}$$

Denotat von Bexp

$$\llbracket a \rrbracket_B : \text{Bexp} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \mathbb{B})$$

$$\begin{aligned} \llbracket !b \rrbracket_B &= \{(\sigma, \text{true}) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, \text{false}) \in \llbracket b \rrbracket_B\} \\ &\quad \cup \{(\sigma, \text{false}) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, \text{true}) \in \llbracket b \rrbracket_B\} \\ \llbracket b_1 \ \&\& \ b_2 \rrbracket_B &= \{(\sigma, \text{false}) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, \text{false}) \in \llbracket b_1 \rrbracket_B\} \\ &\quad \cup \{(\sigma, \text{true}) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, \text{true}) \in \llbracket b_1 \rrbracket_B, (\sigma, \text{true}) \in \llbracket b_2 \rrbracket_B\} \\ \llbracket b_1 \ \parallel \ b_2 \rrbracket_B &= \{(\sigma, \text{true}) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, \text{true}) \in \llbracket b_1 \rrbracket_B\} \\ &\quad \cup \{(\sigma, \text{true}) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, \text{false}) \in \llbracket b_1 \rrbracket_B, (\sigma, \text{true}) \in \llbracket b_2 \rrbracket_B\} \end{aligned}$$

Kompositionalität und Striktheit

Lemma (Partielle Funktion)

$\llbracket - \rrbracket_B$ ist *rechtseindeutig* und damit eine *partielle Funktion*.

- Beweis analog zu $\llbracket - \rrbracket_A$.
- Ist $\llbracket - \rrbracket_B$ strikt? Natürlich nicht:
- Sei $\llbracket b_1 \rrbracket_B(\sigma) = \text{false}$, dann $\llbracket b_1 \ \&\& \ b_2 \rrbracket_B(\sigma) = \llbracket b_1 \rrbracket_B(\sigma) = \text{false}$
- Wir können deshalb nicht so einfach schreiben $\llbracket b_1 \ \&\& \ b_2 \rrbracket_B(\sigma) = \llbracket b_1 \rrbracket_B(\sigma) \wedge \llbracket b_2 \rrbracket_B(\sigma)$
- Die normale zweiwertige Logik behandelt Definiertheit gar nicht. Bei uns müssen die logischen Operatoren links-strikt sein:

$$\begin{array}{lll} \perp \wedge a = \perp & \text{false} \wedge a = \text{false} & \text{true} \wedge a = a \\ \perp \vee a = \perp & \text{true} \vee a = \text{true} & \text{false} \vee a = a \end{array}$$

Arbeitsblatt 3.3: Semantik II

Wir üben noch einmal die Nichtstriktheit. Gegeben $s = (x \mapsto 7)$ und $b \equiv (7 == x) \parallel (x/0 == 1)$

Berechnen Sie die Semantik in den Notationen von oben:

$$(s, ?) : \llbracket (7 == x) \parallel (x/0 == 1) \rrbracket$$

...

$$\llbracket (7 == x) \parallel (x/0 == 1) \rrbracket(s) = \dots ?$$

Hilfreiche Notation: $a \wedge b = a \ \&\& \ b$, $a \vee b = a \ \parallel \ b$

Lösung

Denotationale Semantik von Anweisungen

- Zuweisung: punktweise Änderung des Zustands σ zu $\sigma[x \mapsto n]$
- Sequenz: Komposition von Relationen

Definition (Komposition von Relationen)

Für zwei Relationen $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ ist ihre **Komposition**

$$R \circ S \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, z) \mid \exists y \in Y. (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$$

Wenn R, S zwei partielle Funktionen sind, ist $R \circ S$ ihre Funktionskomposition.

- Leere Sequenz: Leere Funktion? Nein, Identität. Für Menge X ,

$$\text{Id}_X \stackrel{\text{def}}{=} X \times X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

ist die **Identitätsfunktion** ($\text{Id}_X(x) = x$).

Arbeitsblatt 3.4: Komposition von Relationen

Zur Übung: betrachten Sie folgende Relationen:

$$R = \{(1, 7), (2, 3), (3, 9), (4, 3)\}$$

$$S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 5), (4, 7), (5, 9), (7, 3), (8, 15)\}$$

Berechnen Sie $R \circ S = \{(1, ?), \dots\}$

Denotat von Stmt

$$\llbracket \cdot \rrbracket_C : \text{Stmt} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$$

$$\llbracket x = a \rrbracket_C = \{(\sigma, \sigma[x \mapsto n]) \mid \sigma \in \Sigma \wedge (\sigma, n) \in \llbracket a \rrbracket_A\}$$

$$\llbracket c_1; c_2 \rrbracket_C = \llbracket c_1 \rrbracket_C \circ \llbracket c_2 \rrbracket_C$$

$$\llbracket \{\} \rrbracket_C = \text{Id}_\Sigma$$

$$\begin{aligned} \llbracket \text{if } (b) \ c_0 \ \text{else} \ c_1 \rrbracket_C &= \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, \text{true}) \in \llbracket b \rrbracket_B \wedge (\sigma, \sigma') \in \llbracket c_0 \rrbracket_C\} \\ &\quad \cup \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, \text{false}) \in \llbracket b \rrbracket_B \wedge (\sigma, \sigma') \in \llbracket c_1 \rrbracket_C\} \end{aligned}$$

Aber was ist

$$\llbracket \text{while } (b) \ c \rrbracket_C = ??$$

Denotationale Semantik von while

- Sei $w \equiv \text{while } (b) \ c$ (und $\sigma \in \Sigma$). Operational gilt:

$$w \sim \text{if } (b) \ \{c; w\} \ \text{else} \ \{\}$$

- Dann sollte auch gelten

$$\begin{aligned} \llbracket w \rrbracket_C &\stackrel{?}{=} \llbracket \text{if } (b) \ \{c; w\} \ \text{else} \ \{\} \rrbracket_C \\ &= \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, \text{true}) \in \llbracket b \rrbracket_B \wedge (\sigma, \sigma') \in \llbracket c \rrbracket_C \circ \llbracket w \rrbracket_C\} \\ &\quad \cup \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, \text{false}) \in \llbracket b \rrbracket_B \wedge (\sigma, \sigma') \in \llbracket \{\} \rrbracket_C\} \end{aligned}$$

- Das ist eine **rekursive** Definition von $\llbracket w \rrbracket_C$:

$$x = F(x)$$

- Das ist ein **Fixpunkt**:

$$x = \text{fix}(F)$$

- Was ist das?

Fixpunkte

Definition (Fixpunkt)

Für $f : X \rightarrow X$ ist ein **Fixpunkt** ein $x \in X$ so dass $f(x) = x$.

- ▶ Hat jede Funktion $f : X \rightarrow X$ einen Fixpunkt? Nein
- ▶ Kann eine Funktion mehrere Fixpunkte haben? Ja — aber nur einen kleinsten.
- ▶ Beispiele
 - ▶ Fixpunkte von $f(x) = \sqrt{x}$ sind 0 und 1; ebenfalls für $f(x) = x^2$.
 - ▶ Für die Sortierfunktion sind alle sortierten Listen Fixpunkte
 - ▶ Die Funktion $f(x) = x + 1$ hat keinen Fixpunkt in \mathbb{Z}
 - ▶ Die Funktion $f(X) = \mathbb{P}(X)$ hat überhaupt keinen Fixpunkt
- ▶ $fix(f)$ ist also der **kleinste Fixpunkt** von f .

Denotationale Semantik für die Iteration

- ▶ Sei $w \equiv \text{while } (b) \ c$
- ▶ Konstruktion: "Auffalten" der Schleife (f ist ein Denotat):

$$\llbracket f \rrbracket = \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, true) \in \llbracket b \rrbracket_B \wedge (\sigma, \sigma') \in \llbracket c \rrbracket_C \circ f\} \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, false) \in \llbracket b \rrbracket_B\}$$

- ▶ b und c sind Parameter von Γ
- ▶ Dann ist

$$\llbracket w \rrbracket_C = fix(\Gamma)$$

Konstruktion des kleinsten Fixpunktes (Kurzversion)

- ▶ Gegeben Funktion Γ auf Denotaten $\Gamma : (\Sigma \rightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$
- ▶ Wir konstruieren eine Sequenz $\Gamma^i : \Sigma \rightarrow \Sigma$ (mit $i \in \mathbb{N}$) von Funktionen:

$$\Gamma^0(s) \stackrel{def}{=} \perp$$

$$\Gamma^{i+1}(s) \stackrel{def}{=} \Gamma(\Gamma^i)(s)$$

- ▶ Dann ist

$$fix(\Gamma) \stackrel{def}{=} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma^i$$

- ▶ Verkürzte Version — der Fixpunkt muss so nicht existieren (er tut es aber für alle Programme)

Denotation für Stmt

$$\llbracket \cdot \rrbracket_C : \{Stmnt \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)\}$$

$$\llbracket x = a \rrbracket_C = \{(\sigma, \sigma[x \mapsto a]) \mid \sigma \in \Sigma \wedge (\sigma, a) \in \llbracket a \rrbracket_A\}$$

$$\llbracket c_1; c_2 \rrbracket_C = \llbracket c_1 \rrbracket_C \circ \llbracket c_2 \rrbracket_C$$

$$\llbracket \{\} \rrbracket_C = Id_\Sigma$$

$$\llbracket \text{if } (b) \ c_0 \ \text{else } c_1 \rrbracket_C = \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, true) \in \llbracket b \rrbracket_B \wedge (\sigma, \sigma') \in \llbracket c_0 \rrbracket_C\} \cup \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, false) \in \llbracket b \rrbracket_B \wedge (\sigma, \sigma') \in \llbracket c_1 \rrbracket_C\}$$

$$\llbracket \text{while } (b) \ c \rrbracket_C = fix(\Gamma)$$

$$\Gamma(s) = \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, true) \in \llbracket b \rrbracket_B \wedge (\sigma, \sigma') \in \llbracket c \rrbracket_C \circ s\} \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, false) \in \llbracket b \rrbracket_B\}$$

Der Fixpunkt bei der Arbeit (I)

```
while (x < 0) {
  x = x + 1;
}
```

$$\Gamma(f)(\sigma) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \sigma & \sigma(x) \geq 0 \\ f(\sigma[x \mapsto \sigma(x) + 1]) & \sigma(x) < 0 \end{cases}$$

Wir betrachten den Zustand $s = \langle x \mapsto ? \rangle$ (nur eine Variable):

s	$\Gamma^0(s)$	$\Gamma^1(s)$	$\Gamma^2(s)$	$\Gamma^3(s)$
-2	\perp	$\Gamma^0(s[x \mapsto -1]) = \perp$	$\Gamma^1(s[x \mapsto -1]) = \perp$	$\Gamma^2(s[x \mapsto -1]) = \perp$
-1	\perp	$\Gamma^0(s[x \mapsto 0]) = \perp$	$\Gamma^1(s[x \mapsto 0]) = 0$	$\Gamma^2(s[x \mapsto 0]) = 0$
0	\perp	0	0	0
1	\perp	1	1	1

Der Fixpunkt bei der Arbeit (II)

```
x = 0;
while (n > 0) {
  x = x + n;
  n = n - 1;
}
```

$$\Gamma(f)(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \sigma(n) \leq 0 \\ f(\sigma[x \mapsto \sigma(x) + \sigma(n)][n \mapsto \sigma(n) - 1]) & \sigma(n) > 0 \end{cases}$$

Wir betrachten Zustände $s = \langle x \mapsto ?, n \mapsto ? \rangle$ (zwei Variablen).

Der Wert von x im Initialzustand ist dabei unerheblich:

s	$\Gamma^0(s)$	$\Gamma^1(s)$	$\Gamma^2(s)$	$\Gamma^3(s)$	$\Gamma^4(s)$	$\Gamma^5(s)$
n	x	x	x	x	x	x
-1	\perp	\perp	0	-1	0	-1
0	\perp	\perp	0	0	0	0
1	\perp	\perp	\perp	\perp	1	0
2	\perp	\perp	\perp	\perp	3	0
3	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	6
4	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	10

Der Fixpunkt bei der Arbeit (III)

Kleine Änderung im Beispielprogramm:

```
x = 0;
while (n != 0) {
  x = x + n;
  n = n - 1;
}
```

$$\Gamma(f)(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \sigma(n) = 0 \\ f(\sigma[x \mapsto \sigma(x) + \sigma(n)][n \mapsto \sigma(n) - 1]) & \text{sonst} \end{cases}$$

Jetzt ergibt sich:

s	$\Gamma^0(s)$	$\Gamma^1(s)$	$\Gamma^2(s)$	$\Gamma^3(s)$	$\Gamma^4(s)$
n	x	x	x	x	x
-2	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
-1	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
0	\perp	\perp	0	0	0
1	\perp	\perp	\perp	1	0
2	\perp	\perp	\perp	\perp	3
3	\perp	\perp	\perp	\perp	6

Der Fixpunkt bei der Arbeit (IV)

```
while (1) {
  x = x + 1;
}
```

$$\Gamma(f)(\sigma) \stackrel{def}{=} f(\sigma[x \mapsto \sigma(x) + 1])$$

Jetzt ergibt sich:

s	$\Gamma^0(s)$	$\Gamma^1(s)$	$\Gamma^2(s)$	$\Gamma^3(s)$
-2	\perp	\perp	\perp	\perp
-1	\perp	\perp	\perp	\perp
0	\perp	\perp	\perp	\perp
1	\perp	\perp	\perp	\perp
2	\perp	\perp	\perp	\perp
3	\perp	\perp	\perp	\perp

Arbeitsblatt 3.5: Semantik III

Wir betrachten das Beispielprogramm:

```
x= 1;
while (n > 0) {
  x= x*n;
  n= n-1;
}
```

Berechnen Sie wie oben den Fixpunkt:

s	G ⁰	G ¹	G ²	G ³	G ⁴
n	x n	x n	x n	x n	x n
0					
1					
2					
3					

Arbeitsblatt 3.5: Semantik III

Wir betrachten das Beispielprogramm:

```
x= 1;
while (n > 0) {
  x= x*n;
  n= n-1;
}
```

Der Fixpunkt bei der Arbeit (V)

```
x= 0;
i= 0;
while (i <= n) {
  x= x+i;
  i= i+1;
}
```

$$\Gamma(f)(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sigma & \sigma(i) > \sigma(n) \\ f(\sigma[x \mapsto \sigma(x) + \sigma(i)][i \mapsto \sigma(i) + 1]) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten nur die while-Schleife mit $s = \langle n \mapsto ?, i \mapsto ?, x \mapsto ? \rangle$.

s	$\Gamma^0(s)$	$\Gamma^1(s)$	$\Gamma^2(s)$	$\Gamma^3(s)$	$\Gamma^4(s)$
n i	n i x	n i x	n i x	n i x	n i x
0 0	⊥ ⊥ ⊥	⊥ ⊥ ⊥	0 1 x	0 1 x	0 1 x
0 1	⊥ ⊥ ⊥	0 1 x	0 1 x	0 1 x	0 1 x
1 0	⊥ ⊥ ⊥	⊥ ⊥ ⊥	⊥ ⊥ ⊥	1 2 x+1	1 2 x+1
1 1	⊥ ⊥ ⊥	⊥ ⊥ ⊥	1 2 x+1	1 2 x+1	1 2 x+1
1 2	⊥ ⊥ ⊥	1 2 x	1 2 x	1 2 x	1 2 x
2 0	⊥ ⊥ ⊥	⊥ ⊥ ⊥	⊥ ⊥ ⊥	⊥ ⊥ ⊥	2 3 x+3
2 1	⊥ ⊥ ⊥	⊥ ⊥ ⊥	⊥ ⊥ ⊥	2 3 x+3	2 3 x+3
2 2	⊥ ⊥ ⊥	⊥ ⊥ ⊥	2 3 x+2	2 3 x+2	2 3 x+2
2 3	⊥ ⊥ ⊥	2 3 x	2 3 x	2 3 x	2 3 x

Weitere Eigenschaften der denotationalen Semantik

Lemma (Partielle Funktion)

$[-]_c$ ist rechtseindeutig und damit eine **partielle Funktion**.

► Beweis über strukturelle Induktion über $c \in \mathbf{Stmt}$ und über **Fixpunktinduktion**:

- Zu zeigen: wenn s rechtseindeutig, dann ist $\Gamma(s)$ rechtseindeutig
- Dann ist $\text{fix}(\Gamma)$ rechtseindeutig.

► Eigenschaften der Iteration:

- Sei $w \equiv \text{while}(b) c$
- Dann

$$[[w]]_c = [[\text{if}(b) \{c; w\} \text{ else } \{\}]]_c \quad (1)$$

$$(\sigma, \sigma') \in [[w]]_c \implies (\sigma', \text{false}) \in [[b]]_s \quad (2)$$

Beweis (1)

$$\begin{aligned} [[w]]_c &= \text{fix}(\Gamma) \\ &= \Gamma(\text{fix}(\Gamma)) \\ &= \Gamma([[w]]_c) \\ &= \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, \text{true}) \in [[b]]_s \wedge (\sigma, \sigma') \in [[c] \circ [[w]]_c\} \\ &\quad \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, \text{false}) \in [[b]]_s\} \\ &= \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, \text{true}) \in [[b]]_s \wedge (\sigma, \sigma') \in [[c; w]]_c\} \\ &\quad \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, \text{false}) \in [[b]]_s \wedge (\sigma, \sigma) \in [[\{\}]]_c\} \\ &= [[\text{if}(b) \{c; w\} \text{ else } \{\}]]_c \end{aligned}$$

Note

$$\text{fix}(\Gamma) = \Gamma(\text{fix}(\Gamma)) \Gamma(s) = \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, \text{true}) \in [[b]]_s \wedge (\sigma, \sigma') \in [[c] \circ s\} \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, \text{false}) \in [[b]]_s\} \cup \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, \text{true}) \in [[b]]_s \wedge (\sigma, \sigma') \in [[c_0] \circ s\} \cup \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, \text{false}) \in [[b]]_s \wedge (\sigma, \sigma') \in [[c_1] \circ s\}$$

Zusammenfassung

- Die denotationalen Semantik bildet Programme (Ausdrücke) auf **partielle Funktionen** $\Sigma \rightarrow \Sigma$ ab.
- Zentral ist der Begriff des **kleinsten Fixpunktes**, der die Semantik der while-Schleife bildet.
- undefiniertheit wird **implizit** behandelt (durch die Partialität von $\Sigma \rightarrow \Sigma$).
- Nicht-Termination und undefiniertheit sind semantisch äquivalent.
- Genaues Verhältnis zur **operationalen Semantik?** Nächste Vorlesung

