Berechnung von Pensionsrückstellungen aus den Cash Flows

Dieter Denneberg, Universität Bremen
denneberg@math.uni-bremen.de

korigierte Version 24. Oktober 2013

Abstract

Die erwarteten zukünftigen Zahlungsströme (Cash Flows) aus Pensionsverpflichtungen enthalten mehr Informationen als die Rückstellungen für diese Verpflichtungen zum Bilanzstichtag. Während die Zahlungsströme allein aus den biometrischen Tafeln berechnet werden, hängen Barwerte und Rückstellungen noch vom Rechnungszins ab. Hier wird der Weg von den Pensionsverpflichtungen über die Zahlungsströme zu den Rückstellungen dargestellt. Die Unterschiede zu den herkömmlichen Formeln und die Anwendung auf Prognosen werden diskutiert.

1 Einleitung

Pensionsrückstellungen in der betrieblichen Altersversorgung werden in Deutschland vorwiegend mit Formeln berechnet welche die sog. Kommutationswerte benutzen. Die Formeln der aktuellen Heubeck Richttafeln 2005 G werden seit mindestens 60 Jahren fast unverändert benutzt. Die Formeln waren äußerst effizient, als Multiplikationen mit handgetriebenen Rechenmaschinen noch aufwändig waren.

In die Kommutationswerte ist der Rechnungszinssatz bereits eingerechnet. Angesichts der in den letzten Jahren sehr volatilen Zinssätze ist u.a. diskutiert worden, zeitnahe Zahlungen mit einem anderen Zinssatz abzuzinsen als in weiter Zukunft fällige Zahlungen. Daher ist es sinnvoll, zunächst die aus den Pensionsverpflichtungen entstehenden erwarteten Zahlungsströme zu bestimmen und erst im zweiten Schritt deren Barwerte zu berechnen. Auch für Asset-Liability-Studien, z.B. einer Pensionskasse, ist es sinnvoll, neben den erwarteten Zahlungsströmen auf der Aktivseite auch die auf der Passivseite zu kennen. Dann können finanztheoretische Indikatoren wie die Duration (Abschnitt 9) leicht berechnet werden.

Zur Berechnung der Zahlungsströme benötigt man lediglich die einjährigen Übergangswahrscheinlichkeiten (Sterbewahrscheinlichkeit, Invalidisierungswahrscheinlichkeit, ...) der Richttafeln, Kommutationswerte werden nicht mehr benötigt.

Man kann die erwarteten Zahlungsströme für eine einzelne Person berechnen und dann mittels des Barwertoperators ihre individuelle Pensionsrückstellung ermitteln. Ist man nur an den Pensionsrückstellungen für eine Gruppe von Personen interessiert, so aggregiert man die individuellen Zahlungsströme und kann nun schnell den Barwert der betrachteten Population für verschiedene Zinssätze berechnen.

Für laufende Renten ist diese Methode einfach zu realisieren. Mehr Aufwand machen die Anwartschaften, insbesondere die noch nicht ausfinanzierten. In Abschnitt 7 werden die beiden gängigen Rückstellungsmethoden, die Projected Unit Credit Methode (PUC) und der Teilwert, behandelt.

Erzielt man mit der beschriebenen Methode dieselben Ergebnisse wie mit den klassischen Formeln der Heubeck Richttafeln 2005 G [1] (kurz RT05)? Die wesentlichen Unterschiede und technischen Probleme sind:

Die von [3] übernommene Näherung der RT05 für monatliche Zahlungsweise der Renten ist recht gut, trennt aber nicht Biometrie und Verzinsung. Deshalb werden wir in Abschnitt 3 die diskreten Zahlungsströme mit dem Jahr als Zeiteinheit bei der Barwertberechnung in solche auf Monatsbasis umrechnen.[1]

Beim Anwartschaftsbarwert ${}^{(12)}a_x^{aiA} = a_x^{ai} + {}^{(12)}a_x^{aA}$ auf Invaliden- und Altersrente setzen die RT05 monatliche Zahlungsweise für die Altersrente, aber jährliche für die Invalidenrente an. Gemäß Neuburgers Invarianzsatz in [3] ist der Invalidenrentenbarwert unabhängig von der Zahlungsweise, allerdings unter der Voraussetzung von unterjährig linearer Verzinsung. Hier wird aber, auch bei unterjähriger Zahlungsweise, konsequent die Zinseszinsrechnung angewendet, was angesichts der heutzutage schnellen Finanzmarktreaktionen geboten ist. Die Anwartschaftsbarwerte mit der hier benutzten Methode weichen von denen der Kommutationswertmethode in [1] um weniger als ein Prozent ab.

In den Anwartschaftsbarwert a_x^{ai} auf Invalidenrente geht der Invalidenrentenbarwert $a^i_{x+\frac{1}{2}}$ ein. Die in den RT05 benutzte Formel für letzteren ist eine Näherung, welche minimal zu niedrige Werte liefert. Im hier dargestellten Modell tritt das Problem nicht auf.

Der Übergang vom Anwärter zum Altersrentner macht bei monatlicher Zahlungsweise in unserem Modell mehr Probleme als bei Benutzung der Kommutaionswerte in den RT05. In Abschnitt 4 wird für diesen Fall eine Näherung verwendet. Diese erfordert allerdings, dass bei jährlicher Zahlungsweise der Zahlungsfluss an der Altersgrenze anders aussehen muss als bei monatlicher.

Der wesentliche Vorteil der Cash Flow Methode ist es, dass man mit den erwarteten zukünftigen Zahlungsströmen mehr Information über die Pensionsverpflichtungen erhält als mit den bloßen Rückstellungswerten. Dabei sind die biometrischen Berechnungen klar von den Diskontierungen mit dem Rechnungszins ge-

[1] Alternativ hätte man gleich das biometrische Modell auf Monatsbasis umrechnen können und mit Zahlungsströmen auf Monatsbasis arbeiten können. Statt Zahlungsvektoren mit etwa 120 Komponenten brauchte man dann solche mit 1440 Komponenten. Für die Anwendungen dürfte das hier gewählte Modell ausreichen und übersichtlicher sein.

trennt, was finanztheoretische Auswertungen und Anwendungen erleichtert. Eine Ausnahme bildet der Teilwert für die Anwartschaft eines aktiven Anwärters, da der Zahlungsstrom der Beiträge zinsabhängig ist.

Die erwarteten Zahlungsströme können auch für Prognosen der zukünftigen Pensionsrückstellungen eingesetzt werden (Abschnitt 8). Das gilt allerdings nur, wenn für die Bestandsfortschreibung dieselben Übergangswahrscheinlichkeiten benutzt werden wie für die Berechnung der Rückstellungen.

Wenn nichts anderes gesagt wird, werden die Bezeichnungen der RT05 [1] benutzt. Die Erweiterung [2] der Richttafeln um die Fluktuation von aktiven Anwärtern wird hier nicht betrachtet.

2 Übergangswahrscheinlichkeiten

Das diskrete Modell der Rentenversicherung nutzt traditionell die diskrete Zeitskala mit dem Jahr als Zeiteinheit. Die Wahrscheinlichkeiten $p_{s,t}(x)$ für einen Übergang vom Zustand s einer Person vom ganzzahligen Alter x zum Zustand t im Alter $x+1$ berechnen sich aus den biometrischen Tafeln. Die $p_{s,t}(x)$ werden **Übergangswahrscheinlichkeiten** genannt, im Fall $s = t$ auch Verbleibewahrscheinlichkeiten. Für die Alters-, Invaliden- und Hinterbliebenenversorgung liegen s, t in der **Zustandsmenge** $\mathcal{S} :=$ { "aktiver Anwärter", "Invalidenrentner", "Altersrentner", "tot mit Hinterbliebenen", "tot ohne Hinterbliebene"} oder kurz

$$\mathcal{S} = \{a, i, r, w, \dagger\}\,.$$

Die **Übergangsmatrizen**

$$P(x) := \left(p_{s,t}(x)\right)_{s,t\in\mathcal{S}} \qquad \text{für die Alter } x$$

sind stochastische Matrizen, d.h. sie haben die Zeilensummen 1. Damit sind die $p_{s,\dagger}(x)$ durch die $p_{s,t}(x)$, $t \neq \dagger$ eindeutig bestimmt. Im Fall von Generationentafeln wie [1] beachte man, dass die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{s,t}(x)$ noch vom Geburtsjahr der Person vom Alter x abhängt.

Für jedes der beiden Geschlechter "Frau" und "Mann" gibt es geschlechtsspezifische biometrische Tafeln, so dass die Übergangswahrscheinlichkeiten auch vom Geschlecht abhängen. Bei Bedarf wird die Geschlechtsabhängigkeit wie üblich durch die Altersindices x für männlich und y für weiblich gekennzeichnet. Bei Größen und Funktionen, welche sich auf einen Zustand beziehen, wird der Zustand als oberer Index geschrieben. Z.B. bezeichnet ä_x^r den Barwert einer jährlich vorschüssigen Altersrente an einen genau x-jährigen Altersrentner.

Wegen des Problems des Übergangs zum Zustand "Altersrentner" bei unterjähriger Rentenzahlung (siehe Abschnitt 4), ändern wir das Übergangsmodell aus [1] S. 33f leicht ab: Der Zustand "Invalidenrentner" wird an der Altersgrenze z nicht in den Zustand "Altersrentner" überführt, sondern bis zum Ende der Tafel weitergeführt, natürlich mit $p_{i,i}(x) = p_{r,r}(x)$ (d.h. $q_x^i = q_x^r$) für $x \geq z$ um im Einklang mit den RT05 zu bleiben.[2]

Mit den Bezeichnungen der RT05 sehen die Übergangswahrscheinlichkeiten dann wie folgt aus:

$$
\begin{aligned}
p_{a,a}(x) &= 1 - q_x^{aa} - i_x\,, \qquad x < z-1\,,\\
p_{a,i}(x) &= i_x\,\frac{1-q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^i}\,, \qquad x < z\,,\\
p_{a,r}(x) &= \begin{cases} 1 - q_x^{aa} - i_x\,, & x = z-1\\ p_{r,r}(x)\,, & x \geq z \end{cases}\,,\\
p_{a,w}(x) &= \begin{cases} \left(q_x^{aa} + i_x\frac{\frac{1}{2}\,q_x^i}{1-\frac{1}{2}\,q_x^i}\right) h_x\,\frac{1-q_{y(x)}^w}{1-\frac{1}{2}\,q_{y(x)}^w}\,, & x < z\,,\\ p_{r,w}(x)\,, & x \geq z \end{cases}\,,\\
p_{i,i}(x) &= 1 - q_x^i\,,\\
p_{i,w}(x) &= q_x^i h_x\,\frac{1-q_{y(x)}^w}{1-\frac{1}{2}\,q_{y(x)}^w}\,, \qquad x < z\,,\\
p_{r,r}(x) &= 1 - q_x^r\,, \qquad x \geq z\,,\\
p_{r,w}(x) &= q_x^r h_x\,\frac{1-q_{y(x)}^w}{1-\frac{1}{2}\,q_{y(x)}^w}\,, \qquad x \geq z\,,\\
p_{w,w}(x) &= 1 - q_x^w\,.
\end{aligned}
$$

Die nicht aufgeführten Übergangswahrscheinlichkeiten (z.B. $p_{r,a}$ oder $p_{a,r}(x)$ für $x < z-1$) sind sämtlich Null, außer natürlich die $p_{s,\dagger}(x)$. Hier wurden die $p_{a,r}(x)$ und $p_{a,w}(x)$ auch für $x \geq z$ angegeben, um bei Bestandsfortschreibungen aktive sog. technische Rentner richtig zu erfassen. Mit diesen Festlegungen erhalten wir die Übergangsmatrizen

$$
P(x) = \begin{pmatrix}
p_{a,a}(x) & p_{a,i}(x) & p_{a,r}(x) & p_{a,w}(x) & 1 - \sum_{s\neq\dagger} p_{a,s}(x)\\
0 & p_{i,i}(x) & 0 & p_{i,w}(x) & 1 - p_{i,i}(x) - p_{i,w}(x)\\
0 & 0 & p_{r,r}(x) & p_{r,w}(x) & 1 - p_{r,r}(x) - p_{r,w}(x)\\
0 & 0 & 0 & p_{w,w}(x) & 1 - p_{w,w}(x)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

für Männer vom Alter x. Für Frauen sehen sie ebenso aus mit Altersvariable y statt x.

Auf der Zeitachse sei der **Berechnungsstichtag** stets $j = 0$. Die Variable $j \in \mathbb{Z}$ bezeichnet den Zeitpunkt j Jahre nach bzw. vor dem Stichtag je nach Vorzeichen von j. Als Anzahlen von Personen müssen wir gebrochene Zahlen zulassen. Personenzahlen im Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ werden mit n_t bezeichnet. Das durch

[2] Alternativ könnte man $p_{i,i}(z) = p_{r,r}(z)$ und $p_{i,i}(z+1) = 0,\ p_{i,r}(z+1) = p_{r,r}(z+1)$ setzen. Unsere Setzung ist aber offen für eine Trennung von Invalidenrentnern und sonstigen Rentnern über die Altersgrenze hinaus.

die Übergangsmatrizen $P(x)$ gegebene biometrische Modell liefert erwartete Personenzahlen nur zu den ganzzahligen Zeitpunkten j. Hier ein Beispiel:

Ist $n_j^a(x_j)$ eine Anzahl von aktiven Anwärtern vom Alter $x_j < z-1$ im Zeitpunkt j, so ist die daraus hervorgegangene erwartete Zahl von aktiven Anwärtern im Zeitpunkt $j+1$

$$n_{j+1}^a(x_j+1) = p_{a,a}(x_j)\, n_j^a(x_j)\,, \qquad x_j < z-1 \tag{1}$$

und von invaliden Rentnern

$$n_{j+1}^i(x_j+1) = p_{a,i}(x_j)\, n_j^a(x_j)\,, \qquad x_j < z-1\,.$$

Im Fall $x_j = z-1$ liegt der Sonderfall des Übergangs in die Altersrente vor, der uns in Abschnitt 4 noch beschäftigen wird. Aus den $n_j^a(z-1)$ Anwärtern vom Alter $x_j = z-1$ im Zeitpunkt j gehen

$$(p_{a,i}(z-1) + p_{a,r}(z-1))\; n_j^a(z-1)$$

Invaliden- und Altersrentner im Zeitpunkt $j+1$ hervor[3], der Rest ist mit oder ohne Hinterbliebene verstorben.

Mit Hilfe der Transponierten $P(x)^T$ der Übergangsmatrizen $P(x)$ lässt sich die **Bestandsfortschreibung** so beschreiben: Ist

$$N_j(x_j) \quad = \quad \begin{pmatrix} n_j^a(x_j) \\ n_j^i(x_j) \\ n_j^r(x_j) \\ n_j^w(x_j) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

ein Bestandsvektor[4] von Personen vom Alter x_j im Zeitpunkt j, so ist der Vektor $P(x_j)^T \cdot N_j(x_j)$ der daraus nach einem Jahr hervorgegangene erwartete Bestandsvektor.

3 Unterjährige Rentenzahlung

Da Renten oft Monatsrenten sind, werden Näherungen benutzt, um diese in das Einjahresraster zu überführen. Hier wird wie in [1] die **Gleichverteilungsannahme** gemacht, dass nämlich die Bestandsveränderungen von einem Jahr zum nächsten gleichmäßig über das Jahr verteilt sind. Die Bestände zu Beginn eines Monats[5] erhält man dann aus den Beständen zu Anfang und Ende des betreffenden Jahres durch lineare Interpolation.

[3]In [1] sind das alles Altersrentner.

[4]Die letzte Komponente gibt die Zahl der Toten ohne Hinterbliebene an.

[5]Die folgenden Ausführungen gelten analog natürlich auch für andere Unterteilungen des Jahres, etwa in Quartale.

Die Variable $m \in \{0, \ldots, 11\}$ kennzeichne hier die Monate Januar bis Dezember. Z.B. ist der Beginn des Monats März des Jahres $[j, j+1[$ der Punkt $j + \frac{2}{12}$ auf der kontinuierlichen Zeitachse.

Das biometrische Modell liefert erwartete Personenzahlen n_j nur zu den ganzzahligen Zeitpunkten j. Gemäß der obigen Gleichverteilungsannahme ist dann

$$n_{j+\frac{m}{12}} = n_j + \frac{m}{12}\,(n_{j+1} - n_j) = \frac{12-m}{12}\,n_j + \frac{m}{12}\,n_{j+1}$$

die Personenzahl zu Beginn des Monats m.

f_j bezeichne die Summe der Jahresrenten der n_j Personen im Zeitpunkt j. Bei jährlich vorschüssiger Zahlungsweise wäre f_j im Zeitpunkt j fällig. Bei monatlich vorschüssiger Zahlungsweise ist - wieder unter der obigen Gleichverteilungsannahme - im Zeitpunkt $j + \frac{m}{12}$ der Rentenbetrag

$$^{(12)}f_{j+\frac{m}{12}} := \frac{1}{12}\left(f_j + \frac{m}{12}\,(f_{j+1} - f_j)\right) = \frac{12-m}{12^2}\,f_j + \frac{m}{12^2}\,f_{j+1}\,. \tag{3}$$

fällig.

Der Barwert im Zeitpunkt $j = 0$ dieser im Jahr $[j, j+1[$ fälligen monatlichen Zahlungen ist dann $^{(12)}f_j\ v^j + {}^{(12)}f_{j+\frac{1}{12}}\ v^{j+\frac{1}{12}} + \cdots + {}^{(12)}f_{j+\frac{11}{12}}\ v^{j+\frac{11}{12}}$. Dabei bezeichnet $v = \frac{1}{1+i}$ den Abzinsungsfaktor bei jährlichem Zinssatz i. Der **Barwert** im Zeitpunkt $j = 0$ des gesamten Zahlungsplans f **bei monatlich vorschüssiger Zahlung** lautet dann

$$^{(12)}A_0 f \quad := \quad \sum_{j\geq 0} \sum_{m=0}^{11} {}^{(12)}f_{j+\frac{m}{12}}\ v^{j+\frac{m}{12}}\ . \tag{4}$$

Dagegen ist der **Barwert bei jährlich vorschüssiger Zahlung**

$$A_0 f \quad := \quad \sum_{j\geq 0} f_j\ v^j\ . \tag{5}$$

4 Der Sonderfall Übergang zum Altersrentner

Die Gleichverteilung der Bestandsveränderungen über das Jahr kann - als einzige Ausnahme - nicht für das Erreichen der Altersgrenze angenommen werden, wo der Zustand von Anwärter zu Rentner gewechselt wird. Bei der üblichen versicherungsmathematischen Rundung der Alter ist dieser Wechsel über den Zeitraum ein halbes Jahr vor bis ein halbes Jahr nach dem Erreichen der Altersgrenze verteilt.

Betrachten wir zunächst den Fall jährlich vorschüssiger Rentenzahlungen: Bezeichnet $R = f_0^a$ die jährliche Altersrentenanwartschaft eines im Zeitpunkt $j = 0$ gerade 64-jährigen Anwärters mit Altersgrenze $z = 65$ Jahre, so ist $f_1^r = p_{a,r}(64)R$ die erwartete Altersrente im Zeitpunkt $j = 1$ und $f_2^r = p_{r,r}(65)f_1^r$ die im Zeitpunkt $j = 2$ usw.. Bei jährlich vorschüssiger Rentenzahlung lautet gemäß (5) der Barwert dieser Altersrentenanwartschaft $A_0 f^r = \sum_{j\geq 0} f_j^r \ v^j$, wobei natürlich $f_0^r = 0$ zu setzen ist.

Würde man mit diesem Zahlungsplan f^r den Barwert bei monatlich vorschüssiger Zahlung mit der Formel (4) berechnen, so würde ohne Verzinsung ein Betrag von etwa $\frac{1}{2} f_1^r$ zuviel an Renten ausgezahlt (vgl. Abb. 1, wo $f_1^r = 1$ gesetzt ist und die 12 Stufen innerhalb eines Jahres für die monatliche Zahlung durch eine Gerade ersetzt sind).

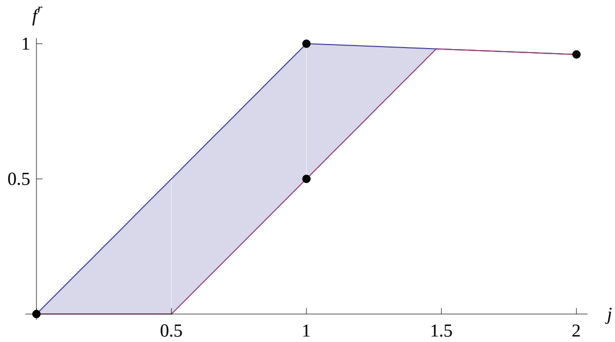

Abbildung 1

Um das auszugleichen, ändern wir f_1^r zu $f_1^{r,12} := \frac{1}{2} f_1^r$ ab und lassen $f_j^{r,12} := f_j^r$ wenn der Übergang vom Anwärter zum Altersrentner nicht im Jahr $[j, j+1]$ stattfindet. Mit dieser Setzung liefert Formel (4) mit ${}^{(12)}A_0 f^{r,12}$ eine gute Näherung für den Barwert des eigentlich zu modellierenden Zahlungsplans, bei dem der Betrag f_1^r zu gleichen monatlichen Zahlungen auf den Zeitraum $[\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}[$ zu verteilen ist (vgl. Abb. 2). Der im Zeitraum $[0,1[$ zuviel ausgezahlte Betrag von etwa $\frac{1}{8} f_1^r$ entspricht etwa dem im darauffolgenden Jahr $[1,2[$ weniger ausgezahlten Betrag. Die Verzinsung dieser Differenzbeträge über die kurzen Zeitabstände wird vernachlässigt, zumal wir Zahlungsfluss und Verzinsung trennen wollen.

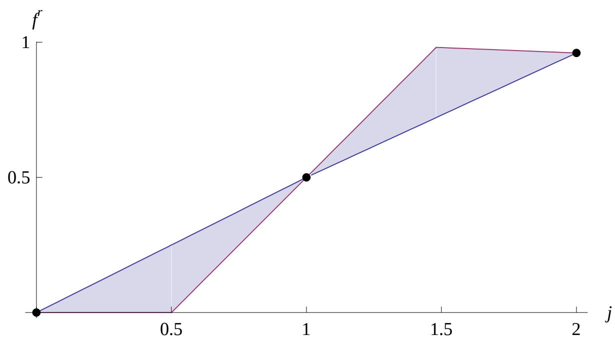

Abbildung 2

5 Fortschreibung einer Population von Versicherten und ihrer Ansprüche

Wir gehen aus von einem Versichertenbestand

$$N_0 = \sum_x N_0(x)$$

am Stichtag $j = 0$. Dabei bezeichnet der Vektor $N_0(x)$ (vgl. (2)) den Teilbestand der im Zeitpunkt 0 versicherungstechnisch x-jährigen Personen. Mit der Rekursion

$$N_{j+1}(x_j + 1) = P(x_j)^T \cdot N_j(x_j)\,, \quad N_{j+1} = \sum_x N_{j+1}(x_j + 1) \tag{6}$$

berechnet sich hieraus der erwartete Versichertenbestand N_j in jedem Zeitpunkt $j > 0$ mit Hilfe der Übegangsmatrizen $P(x)$.

Die Rekursion für die Rentenansprüche ist komplexer, da häufig jährliche Steigerungen der Anwartschaften und der laufenden Renten zu berücksichtigen sind oder die Rente wie beim Übergang in den Zustand "tot mit Hinterbliebenen" mit einem Faktor (hier dem Witwenrentensatz, meist 60%) zu multiplizieren ist. Wir führen die **finanziellen Übergangsmatrizen**

$$P_{\text{fin}}(x) := \left(b_{s,t}\; p_{s,t}(x)\right)_{s,t \in \mathcal{S}} \qquad \text{für die Alter } x$$

ein, welche keine stochastischen Matrizen mehr sind. Die Konstanten[6] $b_{s,t}$ sind durch die Pensionszusage oder die Bewertungsparameter für die Rückstellung bestimmt.

Hier einige Beispiele: Für die Witwenrentenanwartschaft von 60% wäre $b_{a,w} = b_{i,w} = b_{r,w} = 60\%$ zu setzen und die übrigen $b_{s,t} = 1$. Bei der Bewertung von Pensionsverpflichtungen sind heutzutage oft jährliche Steigerungen der Anwartschaften und der laufenden Renten zu berücksichtigen. $b_{a,a}$ ist dann der jährliche Erhöhungsfaktor der Anwartschaften aktiver Anwärter und $b_{i,i} = b_{r,r} = b_{w,w}$ der Erhöhungsfaktor der laufenden Renten. $b_{i,w} = b_{r,w}$ wäre dann das Produkt aus dem Erhöhungsfaktor und dem Witwenrentensatz. In der Regel wird $b_{s,\dagger} = 0$ sein für alle $s \in \mathcal{S}$, da beim Tod ohne Hinterbliebene alle Ansprüche erlöschen.

Seien jetzt $F_0 = \sum_x F_0(x)$ die Rentenansprüche des Versichertenbestandes am Stichtag $j = 0$, wobei der Vektor $F_0(x) = (f_0^s(x))_{s \in \mathcal{S}}$ die Rentensummen des Teilbestandes der x-jährigen Personen angibt. Mit Hilfe der finanziellen Übergangsmatrizen erhält man die Rekursion

$$F_{j+1}(x_j + 1) = P_{\text{fin}}(x_j)^T \cdot F_j(x_j)\,, \quad F_{j+1} = \sum_x F_{j+1}(x_j + 1) \tag{7}$$

für die Vektoren $F_j(x) = (f_j^s(x))_{s \in \mathcal{S}}$ der erwarteten Rentensummen des Personenbestandes $N_j(x)$ in jedem Zeitpunkt j, und das für alle Alter x.

[6] Auch vom Alter x abhängige $b_{s,t}(x)$ sind denkbar.

Bei den Anwartschaften aktiver Anwärter handelt es sich in der Praxis oft nicht um gleichbleibende Rentenbeträge, vielmehr fällt die Rente höher aus je später die Invaliden- bzw. Altersrente beginnt. Die Jahresrente in Abhängigkeit vom Alter x_ℓ des Rentenbeginns wird **Rentenvektor** der Pensionsverpflichtung genannt. Wir bezeichnen diesen ebenfalls mit $f_j^a(x) = (f_j^a(x)_{x_\ell})_{x_\ell \geq x}$ und verstehen die Rekursion für den Verbleib im Zustand "a" aktiver Anwärter dann so, dass sie auf die Komponenten des Rentenvektors einzeln angewandt wird um den Rentenvektor ein Jahr später zu erhalten. Für den Übergang in die Zustände "i", "r" oder "w" ist als Rente natürlich die Komponente $f_j^a(x)_{x_\ell}$ mit x_ℓ als aktuellem Alter zu übernehmen.

6 Einheitsbarwerte der Altersversorgung

Wie Barwerte aus den Zahlungsströmen zu berechnen sind, wurde in Abschnitt 3 beschrieben. Wir zeigen hier an einigen Beispielen, wie sich die üblichen Einheitsbarwerte für die Altersversorgung in unserem Modell berechnen.

Für den Barwert ${}^{(12)}\mathrm{a}_x^{aiA}$ eines x-jährigen Anwärters auf Invaliden- und Altersrente wähle man in den finanziellen Übergangsmatrizen $b_{a,a} = 1$, $b_{a,i} = 1$, $b_{a,r} = 1$, $b_{s,w} = 0$ für alle s und starte mit der Rentenanwartschaft $f_0^a(x) = 1$ und $f_0^s(x) = 0$ für alle $s \neq a$. Mit Hilfe der Rekursion (7) mit $F_0 = F_0(x) = (f_0^s(x))_{s \in \mathcal{S}}$ erhält man die erwarteten Zahlungsströme f^i und $f^{r,12}$ der Invaliden- und Altersrenten, aus denen man mittels (4) den Einheitsbarwert[7]

$$
{}^{(12)}\mathrm{a}_x^{aiA} \quad = \quad {}^{(12)}A_0(f^i + f^{r,12})
$$

berechnet. Entsprechend erhält man den Anwartschaftsbarwert

$$
{}^{(12)}\mathrm{a}_x^{aw} \quad = \quad {}^{(12)}A_0 f^w
$$

auf Witwenrente, indem man $b_{s,w} = 1$ für alle s setzt.

Für die Teilwertberechnung in Abschnitt 7 benötigen wir den Einheitsbarwert der jährlich vorschüssigen Aktivenrente im Alter x,

$$
\mathrm{a}_x^a \quad = \quad A_0 \left(\frac{n_j^a(x_j)}{n_0^a(x)} \right)_{j \geq 0} \quad = \quad \frac{1}{n_0^a(x)} \sum_{j=0}^{z-1} n_j^a(x_j)\, v^j \,. \tag{8}
$$

Dabei sind die Personenzahlen $n_j^a(x_j)$ die mit der Rekursion (1) aus dem Anfangsbestand $n_0^a(x) > 0$ hervorgegangenen Aktivenbestände.

7 Berechnung von Rückstellungen aus Cash Flows

Bei aktiven Anwärtern sind die Verpflichtungen i.a. nicht ausfinanziert, d.h. die Rückstellung ist niedriger als der Barwert der Versorgungszusage. Wie weit sie

[7] Hier wird, abweichend von den Formeln in [1], auch bei Invalidenrenten von monatlicher Zahlungsweise ausgegangen (siehe Einleitung).

ausfinanziert sind, hängt vom Eintritts- oder Zusagealter ab, welches vor dem Bewertungsstichtag $j = 0$ liegt. Wir behandeln hier die Projected Unit Credit Methode (PUC) und den Teilwert. Die PUC-Methode hat den Vorteil, dass die Rückstellung auch für Bestände von Anwärten aus den aggregierten Zahlungsströmen berechnet werden kann. Das geht beim Teilwert auch, allerdings ist der benötigte Zahlungsstrom der Beiträge vom Zinssatz abhängig.

Jetzt müssen wir die Zeitachse vor dem Bewertungsstichtag $j = 0$ benutzen. Bezeichne $e < 0$ das Eintrittsjahr, $x_e < x$ das Eintrittsalter eines am Bewertungsstichtag 0 genau x-jährigen aktiven Anwärters. Seine zukünftigen Leistungen werden durch den Rentenvektor $f_j^a(x) = (f_j^a(x)_{x_\ell})_{x_\ell \geq x}$ der Versorgungszusage bestimmt (vgl. Ende von Abschnitt 5). Weiter bezeichne $(f_j)_{j\geq 0}$ den Zahlungsfluss der erwarteten Rentenleistungen für diesen Anwärter und seine Hinterbliebenen, d.h. $f_j = f_j^i + f_j^{r,12} + f_j^w$.

Die Rückstellung nach der PUC-Methode (deutsch auch *Anwartschaftsdeckungsverfahren*) heißt **Defined Benefit Obligation** (**DBO**) in der Terminologie des International Accounting Standard oder *Projected Benefit Obligation* (PBO) in US-Terminologie. Neben der DBO ist gemäß dem International Accounting Standard (IAS) für die Gewinn- und Verlustrechnung des auf den Bilanzstichtag folgenden Geschäftsjahres ein Finanzierungsbeitrag **Service Cost** (**SC**), auch *Dienstaufwand* genannt, zu berechnen. Nach IAS bilanzierende Firmen benutzen in der Regel auch die PUC-Methode für die deutsche Handelsbilanz[8], die Service Cost wird für die deutsche Gewinn- und Verlustrechnung jedoch nicht benötigt.

Tritt der Leistungsfall im Alter x_ℓ im Jahr ℓ ein, so trägt der Barwert der nur aus diesem Fall hervorgehenden Leistungen mit der Dienstzeitquote

$$d_\ell^{\text{DBO}} := \frac{|e|}{\ell - e} = \frac{x - x_e}{x_\ell - x_e}$$

zur DBO bei und mit dem Dienstzeitanteil eines Jahres

$$d_\ell^{\text{SC}} := \frac{1}{\ell - e} = \frac{1}{x_\ell - x_e}$$

zur Service Cost. Deshalb modifizieren wir den Rentenvektor $f_j^a(x)$ zum **DBO-Rentenvektor**

$$(d_\ell^{\text{DBO}} \cdot f_j^a(x)_{x_\ell})_{x_\ell \geq x} \; .$$

Mit diesem wird dann der aus der Anwartschaft hervorgehende Zahlungsfluss der erwarteten quotierten Rentenzahlungen g_j berechnet (siehe Abschnitt 5). Sein Barwert am Bewertungsstichtag $j = 0$ ist die DBO,

$$\text{DBO} \;=\; {}^{(12)}A_0 g \; . \tag{9}$$

Analog berechnet man mit dem **SC-Rentenvektor** $(d_\ell^{\text{SC}} \cdot f_j^a(x)_{x_\ell})_{x_\ell \geq x}$ die erwarteten quotierten Rentenzahlungen h_j und damit die Service Cost SC $= {}^{(12)}A_0 h$.

[8] Unterschiede gibt es aber bei dem zu verwendenden Zinssatz.

Die praktische Berechnung von DBO und SC unterscheidet sich von der Berechnung des Barwerts der Anwartschaft nur in der Modifikation des Rentenvektors mit den obengenannten Quoten. Es bietet sich also an, die Zahlungsströme f, g und h in einem gemeinsamen Programm zu berechnen. Man kann diese Zahlungsströme auch über einen Bestand von Anwärtern aggregieren, um dann erst mit dem Barwertoperator (4) DBO und SC des Bestandes zu berechnen. Erst in diesem letzten Berechnungsschritt wird der Zinssatz benötigt.

Nicht so einfach ist die Situation beim Teilwert. Der **Teilwert** einer Anwartschaft im Zeitpunkt $j = 0$ ist der Leistungsbarwert minus dem Barwert der zukünftigen Prämien oder Beiträge, beide im Zeitpunkt $j = 0$, in Formeln

$$T \quad := \quad {}^{(12)}A_0 f - B_{x_e} g \cdot \mathrm{a}_x^a \,, \qquad B_{x_e} g := \frac{{}^{(12)}A_e g}{\mathrm{a}_{x_e}^a} \,. \tag{10}$$

Dabei bezeichnet f den erwarteten Zahlungsfluss der aus dem Anwärterbestand $n_0^a(x)$ hervorgegangenen Leistungen und g den aus dem zugehörigen Bestand $n_e^a(x_e)$ bei Eintritt hervorgegangenen. Letzterer berechnet sich mittels der Rekursion (1) aus dem Bestand $n_0^a(x)$ am Stichtag $j = 0$,

$$n_{j-1}^a(x_j - 1) = \frac{1}{p_{a,a}(x_j - 1)}\, n_j^a(x_j) \,, \qquad e < j \leq 0 \,.$$

Dann lässt sich, wie in Abschnitt 5 für ${}^{(12)}A_0 f$ beschrieben, der Leistungsbarwert ${}^{(12)}A_e g$ berechnen. Zusammen mit (8) haben wir alle Bausteine zusammen, um den Jahresbeitrag $B_{x_e} g$ und den Teilwert T aus den Zahlungsströmen der Versorgungszusage zu berechnen. Da die Formel (10) nichtlinear ist, kann man den Teilwert nicht nach Aggregation der Zahlungsströme f und g von Personen mit unterschiedlichen Altern oder Eintrittsaltern berechnen.

Man kann allerdings den jetzt vom Zinssatz i abhängigen Zahlungsstrom

$$h_j := n_j^a(x_j) B_{x_e} g \,, \qquad j \geq 0$$

der erwarteten individuellen Beiträge bilden und erhält damit die in f und h lineare Formel

$$T \quad := \quad {}^{(12)}A_0 f - A_0 h \,. \tag{11}$$

für den Teilwert. Aggregation der Zahlungsströme f und h vor Berechnung des Teilwerts ist jetzt möglich.

8 Prognose von Rückstellungen

Bisher haben wir zu Pensionsverpflichtungen verschiedene erwartete zukünftige Zahlungsströme gebildet, aus denen wir Barwerte und Rückstellungen zum Bewertungsstichtag $j = 0$ einfach berechnet haben. Diese Zahlungsströme gestatten aber auch zu allen Stichtagen $j_1 > 0$, die erwarteten Barwerte bzw. Rückstellungen zu berechnen. Für die Rückstellungen DBO von Anwärtern sind Prognosen allerdings komplexer.

Für die erwarteten Barwerte im Zeitpunkt $j_1 > 0$ des zukünftigen Teils $(f_j)_{j \geq j_1}$ eines Zahlungsplans f übertragen sich aus Abschnitt 3 die Formeln für jährlich vorschüssige Zahlung

$$A_{j_1} f \quad := \quad \sum_{j \geq j_1} f_j \; v^{j-j_1}$$

und für monatlich vorschüssige Zahlung

$${}^{(12)}A_{j_1} f \quad := \quad \sum_{j \geq j_1} \sum_{m=0}^{11} {}^{(12)}f_{j+\frac{m}{12}} \; v^{j-j_1+\frac{m}{12}} \; .$$

Der erwartete Teilwert T_{j_1} am Prognosestichtag $j_1 > 0$ ist dann gemäß (11)

$$T_{j_1} \quad := \quad {}^{(12)}A_{j_1} f - A_{j_1} h \, .$$

Zu beachten ist dabei, dass für die Barwertoperatoren ${}^{(12)}A_{j_1}$ und A_{j_1} derselbe Zinssatz anzuwenden ist wie bei der Berechnung der Beiträge, welche in den Zahlungsplan h eingehen.

Die Rückstellungen DBO für aktive Anwärter zu prognostizieren macht etwas mehr Mühe. Dafür benötigt man den Zahlungsfluss $(g_j^{j_1})_{j \geq j_1}$ der erwarteten quotierten Rentenzahlungen, welche aus dem erwarteten Bestand $n_{j_1}^a$ am Prognosestichtag $j_1 > 0$ hervorgegangen sind. Es ist

$$\mathrm{DBO}_{j_1} \quad = \quad {}^{(12)}A_{j_1} g^{j_1} \; . \tag{12}$$

g^{j_1} unterscheidet sich vom Zahlungsfluss $g = g^0$ in (9), da die Rentenzugänge aus der Zeit von 0 bis j_1 in g^{j_1} nicht enthalten sind. Man muss also noch den Zahlungsfluss g^{j_1} für jeden Prognosestichtag j_1 berechnen. In der Praxis wird man das gleichzeitig mit g berechnen. Ganz analog verfährt man für die erwartete Service Cost $\mathrm{SC}_{j_1} = {}^{(12)}A_{j_1} h^{j_1}$. Die Barwerte ${}^{(12)}A_{j_1}$ kann man auch erst aus aggregierten Zahlungsströmen eines ganzen Anwärterbestandes berechnen. Auch kann man zu verschiedenen Prognosestichtagen verschiedene Zinssätze benutzen.

9 Duration von Zahlungsströmen

Als weitere Anwendung von Zahlungsströmen behandeln wir kurz die Duration, einen beliebten finanztheoretischen Indikator. Angewendet auf den erwarteten Zahlungsstrom der Leistungen aus Pensionsverpflichtungen kann die Duration dieser Verpflichtung auf der Passivseite der Bilanz mit den Durationen der Aktivpositionen verglichen werden.

Wie bisher bezeichne $v = \frac{1}{1+i}$ den Abzinsungsfaktor beim Zinssatz i, j_0 den Bilanzstichtag und $f = (f_j)_{j \geq j_0}$ einen Zahlungsstrom, so ist die **Macaulay Duration** $D_{j_0} f$ von f definiert als die mit den Barwertanteilen der einzelnen Zahlungen f_j gewichtete mittlere Zahlungsdauer, in Formeln:

$$D_{j_0} f \quad := \quad \sum_{j \geq j_0} (j - j_0) \, \frac{v^{j-j_0} f_j}{A_{j_0} f} \; .$$

Mit der kontinuierlichen Zinsrate $\lambda := -\ln v$, d.h. $v = e^{-\lambda}$, gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} A_{j_0} f \quad = \quad - \sum_{j \geq j_0} (j - j_0) \, e^{-\lambda (j - j_0)} f_j \; = \; -D_{j_0} f \cdot A_{j_0} f \; .$$

Da weiter $\frac{d}{di} \lambda = v$ ist, kann die Duration dazu dienen, in linearer Näherung die Änderung $\triangle A_{j_0} f$ des Barwerts $A_{j_0} f$ bei einer kleinen Zinsänderung $\triangle i$ zu bestimmen,

$$\triangle A_{j_0} f \quad \approx \quad -D_{j_0} f \cdot A_{j_0} f \cdot v \triangle i \; ,$$

d.h. $-D_{j_0} f \cdot v \triangle i$ ist eine gute Näherung für die relative Veränderung des Barwerts. Umgekehrt kann man von den Barwerten mit benachbarten Zinssätzen i und $i + \triangle i$ auf die Duration schließen,

$$D_{j_0} f \quad \approx \quad - \frac{\triangle A_{j_0} f}{A_{j_0} f \cdot v \triangle i} \; .$$

Da der Barwert eine konvexe Funktion des Zinssatzes i ist, ließe sich die letzte Approximation noch verbessern, indem man den Mittelwert der Durationen mit Zinsänderungen $\pm \triangle i$ bildet.

References

[1] Klaus Heubeck: Richttafeln 2005 G. Verlag Heubeck Richttafeln GmbH, Köln 2005.

[2] Klaus Heubeck: Erweiterung der Richttafeln 2005 G um Fluktuation. Verlag Heubeck Richttafeln GmbH, Köln 2011.

[3] Neuburger, E.: Unabhängigkeit von Rentenanwartschaftsbarwerten von der Zahlungsweise, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XIX, Heft 3, 1990